

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**

**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**  
**Departamento de Matemática Aplicada**



**HETEROGENEIDADES ESPACIALES EN SISTEMAS DE  
REACCIÓN-DIFUSIÓN**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR**  
**PRESENTADA POR**

**Pablo Álvarez Caudevilla**

Bajo la dirección del doctor  
Julián López Gómez

**Madrid, 2008**

- **ISBN: 978-84-692-0992-9**

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Matemáticas

Departamento de Matemática Aplicada



# **Heterogeneidades espaciales en Sistemas de Reacción-Difusión**

Memoria presentada por

**Pablo Álvarez Caudevilla**

para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas

Dirigida por **Julián López Gómez**

Madrid, 2008



Success is the ability to go  
from one failure to another  
without no loss of enthusiasm <sup>1</sup>.

**Winston Churchill.**

---

<sup>1</sup>El éxito es la habilidad de ir de un error a otro sin la pérdida del entusiasmo.



# Reconocimientos

Ante todo me gustaría mostrar mis más profundo agradecimiento a mi director de tesis, el Profesor Julián López Gómez, por toda la atención prestada y la gran paciencia exhibida, especialmente cuando dejó de fumar, por nuestras intensas charlas sobre matemáticas y por enseñarme que la mejor manera de investigar es romper con los prejuicios establecidos. También por animarme a introducirme en otros campos de las Matemáticas y encontrar las posibles conexiones entre ellos; a asistir a distintas conferencias y realizar visitas en otras universidades en el extranjero que me han proporcionado la oportunidad de ampliar mi carrera científica. Mi más profunda admiración hacia su trabajo y la esperanza de que podamos continuar con el viaje que hemos comenzado.

También, me gustaría dar las gracias a todos los profesores del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense de Madrid, a aquellos que impartieron cursos de doctorado bajo invitación durante el tiempo en el que he estado realizando el doctorado, muy especialmente a los Profesores Herbert Amann y Paul H. Rabinowitz, por sus fantásticas enseñanzas que han contribuido, de una forma u otra a mi formación científica.

A los Profesores Victor A. Galaktionov y Jonathan D. Evans por su invitación a la Universidad de Bath, brindándome la oportunidad de introducirme en el mundo de las ecuaciones de películas finas y animándome a continuar con el estudio, ya comenzado, de las mismas. Especialmente quiero dar las gracias a Victor Rivero Mercado por su constante apoyo y ayuda informática. Gracias a todos ellos por hacer mi estancia en Bath de lo más agradable y llena de fantásticas conversaciones sobre Matemáticas.

Debo agradecer también, de manera muy afectuosa, al Profesor Carlos Vega Vicente por tener siempre su puerta abierta y por darme la oportunidad de continuar con la amistad que ha tenido con mi familia durante tantos años.

Mis agradecimientos más cariñosos van dirigidos a mis amigos Eloy, David, Alex, Marcos, Eduardo, Valero, Carmen, por su apoyo y constante amistad durante tantos años.

Un especial agradecimiento y todo mi cariño a Erika, por estar a mi lado en cada momento, apoyándome y dándome la fuerza necesaria para pelear hasta el último aliento en los momentos más difíciles. También, quiero dar un especial agradecimiento a Roy y Pat por sus consejos e interés.

Finalmente, y no en menor medida, me gustaría agradecer a mis padres, por su ayuda incondicional y por brindarme la oportunidad de desarrollar una carrera científica. De ellos aprendí que la cultura nos hace menos vulnerables. También, a mis hermanos que siempre han estado ahí apoyándome.

A todos ellos, muchas gracias.

Madrid, Febrero – 2008.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>vii</b>
<b>1 Comportamiento asintótico de los autovalores principales</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.2 Principio del Máximo y autovalores principales . . . . .	7
1.3 Demostración del Teorema 1.1 . . . . .	11
1.4 Estimación inferior de $\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega]$ cuando $ \Omega  \downarrow 0$ . . . . .	23
1.5 Un ejemplo de ecuaciones diferenciales ordinarias . . . . .	25
<b>2 De soluciones clásicas a Metasoluciones</b>	<b>35</b>
2.1 Introducción . . . . .	35
2.2 Principales resultados . . . . .	40
2.3 Resultados abstractos auxiliares . . . . .	44
2.4 El problema en $D \subset \Omega_+$ . Cotas a priori en $\Omega_+$ . . . . .	57
2.4.1 Caso $M = N = 0$ y $\bar{D} \subset \Omega_+$ . . . . .	59
2.4.2 Caso en que $(M, N) > (0, 0)$ y $\bar{D} \subset \Omega_+$ . . . . .	64
2.4.3 Caso $M = N = \infty$ y $\bar{D} \subset \Omega_+$ . . . . .	66
2.4.4 Caso general cuando $M, N \in (0, \infty]$ y $D \subset \Omega_+$ . . . . .	67
2.5 Demostraciones de los Teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 . . . . .	71
2.5.1 Caracterización de la existencia de los estados de coexistencia para el Teorema 2.3 . . . . .	71
2.5.2 Monotonía y comportamiento blow-up de $\theta(\lambda)$ en $\Omega_{0,1}$ cuando $\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})$ . . . . .	74
2.5.3 Problema auxiliar para la demostración del Teorema 2.2 . . . . .	76
2.5.4 Existencia de soluciones grandes en el Teorema 2.2 . . . . .	79
2.5.5 Comportamiento blow-up de $L_{[\lambda, D]}^{\min}$ en $\Omega_{0,2}$ cuando $\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,2})$ . . . . .	83
2.5.6 Conclusión de la demostración del Teorema 2.3 . . . . .	86
2.5.7 Conclusión de la demostración del Teorema 2.2 . . . . .	93
2.6 Demostración del Teorema 2.4 . . . . .	94



<b>3</b>	<b>Una clase especial de sistemas cooperativos sublineales</b>	<b>101</b>
3.1	Introducción . . . . .	101
3.2	Propiedades elementales de $\Sigma(\lambda)$ . . . . .	107
3.3	Existencia de los estados de coexistencia . . . . .	112
3.3.1	Caracterización de la existencia de los estados de coexistencia en el caso (C) . . . . .	116
3.3.2	Caracterización de la existencia en el caso (A) . . . . .	117
3.4	Comportamiento límite de los estados de coexistencia . . . . .	118
3.5	Dinámica de las soluciones positivas de (3.1.1) . . . . .	121
	<b>Bibliografía</b>	<b>123</b>

# Introducción

El propósito de esta Tesis es el estudio de los efectos de las heterogeneidades espaciales sobre unos determinados sistemas cooperativos no-lineales dependientes de un parámetro, como los estudiados por M. Molina-Meyer [53], [54] y [55]. Se dice que estos sistemas son cooperativos en el sentido que sus coeficientes de acoplamiento son estrictamente positivos en todo el dominio subyacente, como fue discutido por Figueiredo & Mitidieri [27], Sweers [66], López-Gómez & Molina-Meyer [48], y Amann [7]. De forma concreta, averiguaremos las dinámicas de estos modelos. Entre otras cosas, caracterizaremos la existencia de las soluciones positivas. Matemáticamente la elección de los sistemas cooperativos viene motivada por el hecho de que los operadores lineales asociados satisfacen el Principio del Máximo.

El primer capítulo, analiza un sistema elíptico lineal de tipo cooperativo obteniendo el comportamiento asintótico del menor autovalor (autovalor principal), así como de su autofunción principal asociada cuando un parámetro va a infinito. En este capítulo, suponemos que los potenciales en frente del parámetro son positivos en unos subdominios, mientras que se anulan en otros. La principal aportación de este capítulo es la obtención del perfil límite cuando los potenciales son positivos en diferentes subdominios. En tal caso, los métodos de monotonía utilizados en el caso especial cuando los potenciales son positivos en los mismos subdominios (cf. López-Gómez [37], [38] y Molina-Meyer [55]) no funcionan. El principal resultado establece que el autovalor principal se aproxima al menor autovalor principal asociado con las regiones donde los potenciales se anulan. Por lo que el límite depende de la medida de Lebesgue y de otras propiedades ocultas, más geométricas, de las regiones donde los potenciales se anulan. Además, a pesar de los efectos cooperativos, la autofunción principal se aproxima a  $(0, 0)$  cuando el parámetro va a infinito en las regiones donde al menos uno de los potenciales es positivo. En este capítulo, la convergencia en  $H_0^1 \times H_0^1$  es obtenida, refinando algunos resultados previos de Dancer & López-Gómez [20] para una única ecuación, donde fue probado que la convergencia  $L^2$  ocurría. Finalmente, estableceremos, a través de un ejemplo de ecuaciones diferenciales ordinarias que cuando los autovalores principales de esas regiones de cancelación son iguales, bajo unas determinadas suposiciones especiales, la autofunción principal límite se concentra en la región exterior. Este es el primer ejemplo de esta naturaleza disponible en la literatura especializada.

El Capítulo 2 extiende el análisis llevado a cabo por J. López-Gómez en [46] para una única ecuación a sistemas cooperativos con el fin de averiguar las dinámicas de un problema parabólico sublineal cooperativo, dependiente de un parámetro y suponiendo heterogeneidades

espaciales para los potenciales en frente de las no-linealidades. De alguna manera, estos resultados extienden algunos pioneros hallazgos para una única ecuación 'degenerada' obtenidos por H. Brezis & L. Oswald [11], T. Ouyang [58], Fraile et al.[28], Gómez-Reñasco [31], Gómez-Reñasco & López-Gómez [32], García-Melián et al.[29] y López-Gómez [37], [39], [43] y para sistemas cooperativos por Molina-Meyer [54], [53] y [55]. Se puede decir que estos resultados son nuevos incluso para una única ecuación, puesto que se considera que hay unos potenciales en frente del parámetro. Para describir las dinámicas de estos problemas cooperativos, como para una ecuación singular, una nueva clase de estados de equilibrio generalizados no-distributivos y no-clásicos debe ser incorporada al análisis matemático del problema con el objetivo de describir los perfiles asintóticos de las soluciones del problema parabólico sublineal cuando  $t \uparrow \infty$ , *Metasoluciones*. El concepto de Metasolución aparece por primera vez en la Tesis Doctoral de R. Gómez-Reñasco [31]. Las metasoluciones son extensiones por infinito de las soluciones explosivas, o grandes. De esta manera, para algunos valores del parámetro el estado de equilibrio no-negativo es un atractor global, mientras que para otros el atractor global será o el estado de coexistencia o alguna metasolución. Además, caracterizamos la existencia de los estados de coexistencia a través de la construcción de una apropiada supersolución basándonos en un método desarrollado por Fraile et al.[28] y la caracterización del Principio del Máximo de López-Gómez & Molina-Meyer [48]. Adoptando el lenguaje de dinámica de poblaciones, tal caracterización vendrá expresada en función de la tasa de crecimiento de la población.

El Capítulo 3, por primera vez en la literatura, analiza el caso en el cual las no-linealidades se anulan en diferentes subdominios. Como una situación límite, y completamente novedosa, hemos considerado el caso especial en que una de las ecuaciones es lineal mientras que la otra es semilineal degenerada, en el sentido que la no-linealidad se anula en algún subdominio. Para la obtención de los resultados de este capítulo, debemos definir una nueva cota espectral, asociada a un cierto operador no-local. En este análisis creemos más apropiado considerar la intensidad de los efectos cooperativos como el principal parámetro de continuación en vez de la tasa de crecimiento de las especies como se ha hecho en el capítulo anterior. Como una consecuencia del análisis del Capítulo 3, parece que las metasoluciones no-triviales no desempeñan un papel relevante en la descripción de la dinámica de los sistemas estudiados en esta ocasión.

Para conveniencia del lector, cada Capítulo contiene una detallada introducción-resumen sobre sus contenidos.

# Capítulo 1

## Comportamiento asintótico de los autovalores principales

El principal objetivo de este capítulo es obtener el comportamiento asintótico del autovalor principal dependiente de un parámetro  $\lambda$ , para un operador lineal cooperativo, en el caso en el cual el parámetro tiende a infinito y suponiendo que los pesos existentes delante del citado parámetro pueden ser positivos sobre distintos subdominios. Además, obtendremos la expresión exacta de la autofunción asociada al autovalor límite.

### 1.1 Introducción

En este capítulo analizamos el comportamiento límite, cuando  $\lambda \uparrow \infty$  del menor autovalor, al que llamaremos autovalor principal, así como el de su autofunción normalizada asociada, autofunción principal, del problema lineal de autovalores

$$\begin{cases} (L_1 + \lambda a)\varphi - b\psi = \tau\varphi & \text{en } \Omega, \\ (L_2 + \lambda d)\psi - c\varphi = \tau\psi & \\ (\varphi, \psi) = (0, 0) & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , con frontera  $\partial\Omega$  de clase  $\mathcal{C}^{2,\nu}$ , para algún  $\nu \in (0, 1)$ , y de forma que se satisfagan las siguientes condiciones:

(A1) Para cada  $k \in \{1, 2\}$ , el operador diferencial de segundo orden

$$L_k = - \sum_{i,j=1}^N \alpha_{[ij,k]} D_i D_j + \sum_{i=1}^N \alpha_{[i,k]} D_i + \alpha_{[0,k]} \quad (1.1.2)$$

es uniformemente fuertemente elíptico en  $\bar{\Omega}$ , i.e., existe  $\mu_k > 0$  tal que

$$\sum_{i,j=1}^N \alpha_{[ij,k]}(x) \xi_i \xi_j \geq \mu_k |\xi|^2 \quad (1.1.3)$$

para todo  $x \in \bar{\Omega}$  y  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$ . Además, para cada  $i, j \in \{0, \dots, N\}$ ,

$$\alpha_{[ij,k]} \in \mathcal{C}^{2,\nu}(\bar{\Omega}), \quad \alpha_{[i,k]} \in \mathcal{C}^{1,\nu}(\bar{\Omega}), \quad \alpha_{[0,k]} \in \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega}).$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$\alpha_{[ij,k]} = \alpha_{[ji,k]}, \quad k = 1, 2.$$

(A2)  $a, b, c, d \in \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega})$  y (1.1.1) es *fuertemente cooperativo* en el sentido que

$$b(x) > 0 \quad \text{y} \quad c(x) > 0 \quad \text{para todo } x \in \bar{\Omega}. \quad (1.1.4)$$

Además,  $a \geq 0, d \geq 0$ , de forma que el conjunto abierto

$$\Omega_+ := \{x \in \Omega : a(x) + d(x) > 0\}$$

es un subdominio de  $\Omega$  de clase  $\mathcal{C}^{2,\nu}$  con

$$\bar{\Omega}_+ \subset \Omega,$$

y el conjunto abierto

$$\Omega_+^0 := \text{Int}\{x \in \Omega_+ : a(x)d(x) = 0\},$$

satisface

$$\bar{\Omega}_+^0 \subset \Omega_+.$$

Además, como muestra la figura 1.1,  $\Omega_+ \cap d^{-1}(0)$  y  $\Omega_+ \cap a^{-1}(0)$  son dos apropiadas componentes suficientemente suaves de  $\Omega_+^0$

$$\Omega_+ \cap d^{-1}(0) := \Omega_+^a \cap \Omega_+^0, \quad \Omega_+ \cap a^{-1}(0) := \Omega_+^d \cap \Omega_+^0,$$

donde estamos denotando

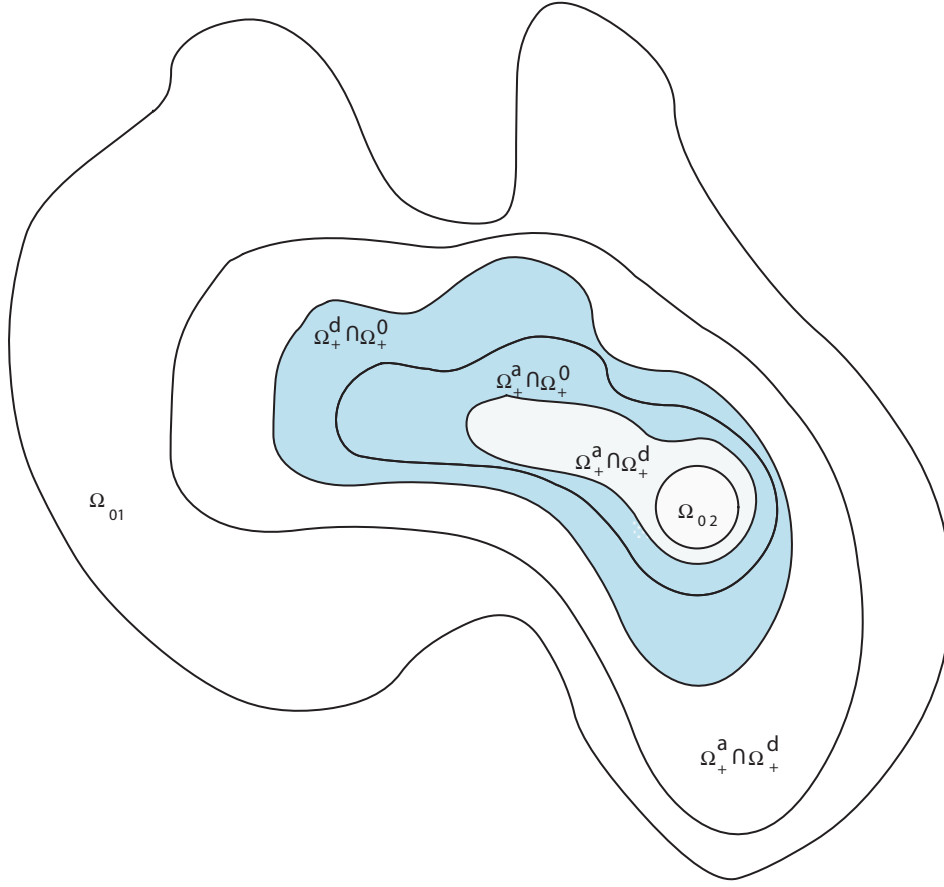
$$\Omega_+^a := \{x \in \Omega : a(x) > 0\}, \quad \Omega_+^d := \{x \in \Omega : d(x) > 0\},$$

y el conjunto compacto

$$K_0 := (a + d)^{-1}(0) = \bar{\Omega} \setminus \Omega_+$$

consta de dos componentes disjuntas,  $K_{0,i}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , tal que  $K_{0,2} \subset \Omega$  y  $\partial K_{0,i}$  son de clase  $\mathcal{C}^{2,\nu}$  para cada  $i \in \{1, 2\}$ . A lo largo de este capítulo escribiremos

$$\Omega_{0,i} := \text{Int } K_{0,i} \subset \Omega, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Figura 1.1: Configuración de  $a(x)$  y  $d(x)$ .

(A3) Poniendo

$$\mathcal{S}(V_1, V_2) := \begin{pmatrix} L_1 + V_1 & -b \\ -c & L_2 + V_2 \end{pmatrix}, \quad V_1, V_2 \in \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega}), \quad (1.1.5)$$

y  $\mathcal{S}_0 := \mathcal{S}(0, 0)$ , la siguiente estimación debe ser satisfecha

$$\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,1}] < \min\{\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,2}], \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_+^0]\}, \quad (1.1.6)$$

donde  $\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,i}]$  y  $\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_+^0]$  representan los autovalores principales de  $\mathcal{S}_0$  en  $\Omega_{0,i}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , y  $\Omega_+^0$  respectivamente.

Bajo la condición (1.1.4), el operador diferencial (1.1.5), y, por lo tanto, el problema lineal de autovalores (1.1.1), es fuertemente cooperativo, como fue discutido por Figueiredo & Mitidieri [27], Sweers [66], López-Gómez & Molina-Meyer [48], y Amann [7]. Por consiguiente,

para cualquier subdominio suave  $D \subset \Omega$ , existe un único  $\tau$  para el cual el problema lineal de autovalores

$$\begin{cases} (L_1 + V_1)\varphi - b\psi = \tau\varphi \\ (L_2 + V_2)\psi - c\varphi = \tau\psi \\ (\varphi, \psi) = (0, 0) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{en } D, \\ \\ \text{en } \partial D, \end{matrix} \quad (1.1.7)$$

posee una solución  $(\varphi, \psi)$  con  $\varphi > 0$  y  $\psi > 0$ . Tal valor de  $\tau$  será denominado *autovalor principal* de  $\mathcal{S}(V_1, V_2)$  en  $D$  (bajo condiciones de frontera Dirichlet homogéneas), y denotado por

$$\sigma[\mathcal{S}(V_1, V_2), D]$$

De acuerdo con [48] y [7],  $\sigma[\mathcal{S}(V_1, V_2), D]$  es simple y *dominante*, en el sentido que

$$\operatorname{Re} \tau > \sigma[\mathcal{S}(V_1, V_2); D] \quad (1.1.8)$$

con realción a cualquier otro autovalor  $\tau$  de (1.1.7).

Además, la *autofunción principal*  $(\varphi, \psi)$  es única, salvo constante multiplicativa, y

$$\varphi \gg 0, \quad \psi \gg 0.$$

A lo largo de esta Memoria se dice que una función  $w \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$  satisface  $w \gg 0$  si permanece en el interior del cono de las funciones no-negativas de  $\mathcal{C}^1(\bar{D})$ , i.e., si

$$w(x) > 0, \quad \text{para todo } x \in D \quad \text{y} \quad \partial w / \partial n(x) < 0, \quad \text{para todo } x \in w^{-1}(0) \cap \partial D,$$

donde  $n = n(x)$  es el vector unitario perpendicular exterior a  $D$  en  $x \in \partial D$ .

Para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ , denotaremos por  $\sigma(\lambda)$  al autovalor principal de (1.1.1), i.e.,

$$\sigma(\lambda) := \sigma[\mathcal{S}(\lambda a, \lambda d); \Omega], \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.1.9)$$

y  $(\varphi_\lambda, \psi_\lambda)$  como la autofunción principal asociada con  $\sigma(\lambda)$  tal que

$$\int_{\Omega} (\varphi_\lambda^2 + \psi_\lambda^2) = 1. \quad (1.1.10)$$

De igual forma a lo establecido con anterioridad sabemos que  $\varphi_\lambda \gg 0$  y  $\psi_\lambda \gg 0$ .

El principal resultado de este capítulo puede ser establecido de la siguiente manera.

**Teorema 1.1** *Supongamos (A1)-(A3). Entonces,*

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \sigma[\mathcal{S}(\lambda a, \lambda d); \Omega] = \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,1}] \quad (1.1.11)$$

y

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \left( \|\varphi_\lambda - \Phi_\omega\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\psi_\lambda - \Psi_\omega\|_{H_0^1(\Omega)} \right) = 0, \quad (1.1.12)$$

donde

$$\Phi_\omega := \Psi_\omega := 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \Omega_{0,1}, \quad (1.1.13)$$

y

$$(\varphi_{0,1}, \psi_{0,1}) := (\Phi_\omega, \Psi_\omega)|_{\Omega_{0,1}}$$

que será la autofunción principal de  $\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,1}]$  normalizada por

$$\int_{\Omega_{0,1}} (\varphi_{0,1}^2 + \psi_{0,1}^2) = 1.$$

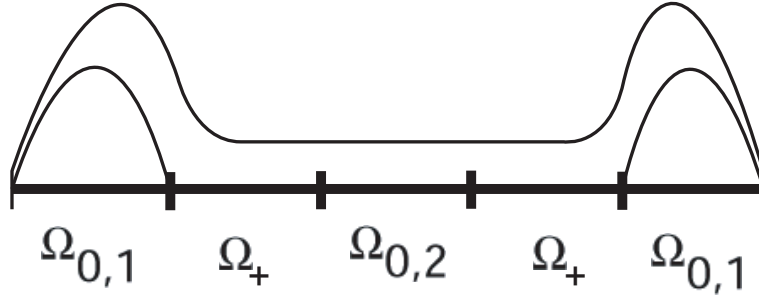


Figura 1.2: Perfil límite de las soluciones positivas.

Teorema 1.1 supone una substancial extensión de algunos resultados ya existentes para el caso especial de la ecuación escalar (cf. López-Gómez [37], [38], Dancer & López-Gómez [20], y [2]), así como de un teorema de Molina-Meyer [55], donde (1.1.11) fue establecido para el caso especial cuando

$$a^{-1}(0) = d^{-1}(0). \quad (1.1.14)$$

De forma bastante sorprendente, en ausencia de la conción (1.1.14), aunque bajo las suposiciones de este capítulo, el Teorema 1.1 establece que

$$(\varphi_\lambda, \psi_\lambda) \longrightarrow (0, 0), \quad \text{cuando } \lambda \uparrow \infty,$$

incluso en las regiones donde exactamente uno de los coeficientes  $a$ , o  $d$ , se anula, siendo el otro positivo; a pesar de la estructura cooperativa de (1.1.1). Esto ocasiona que las herramientas técnicas desarrolladas por Molina-Meyer [55] para probar el Teorema 1.1 bajo la condición (1.1.14), basadas en la construcción de una apropiada supersolución no pueden ser adaptadas para probar nuestro Teorema 1.1. Por lo tanto, la demostración que aquí se proporciona podría ser utilizada en ausencia del Principio del Máximo, cuando el método de sub y supersoluciones falla.

Este capítulo está basado fundamentalmente en el análisis introducido en [2], así como en algunos previos hallazgos, como [37], [38] y Dancer & López-Gómez [20].



Si la condición (1.1.6) fuera reemplazada por

$$\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,2}] < \min\{\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,1}], \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_+^0]\},$$

entonces, en vez de (1.1.11), obtendremos que

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \sigma[\mathcal{S}(\lambda a, \lambda d); \Omega] = \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,2}],$$

y, en vez de (1.1.13), encontraremos que

$$\Phi_\omega := \Psi_\omega := 0 \quad \text{en } \Omega \setminus \Omega_{0,2},$$

mientras que,

$$(\varphi_{0,2}, \psi_{0,2}) := (\Phi_\omega, \Psi_\omega)|_{\Omega_{0,2}},$$

será la autofunción principal asociada con  $\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,2}]$ . Sin embargo, aunque, en el caso abstracto, cuando

$$\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,1}] = \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,2}],$$

el averiguar dónde se concentran las autofunciones principales continúa siendo un problema abierto, pudiéndose concentrar en  $\Omega_{0,1}$ , o en  $\Omega_{0,2}$ , o en ambas componentes simultáneamente, algo que fue mencionado por Barry Simon [63, pp. 110], en la Sección 1.5, probaremos mediante un ejemplo de ecuaciones diferenciales ordinarias que la autofunción límite se concentra en el subdominio exterior bajo la consideración de unas determinadas condiciones especiales.

A lo largo de esta Memoria, para cualquier  $D \subset \Omega$  y  $h \in \mathcal{C}(\bar{D})$ , se dice que

$$h > 0 \quad \text{si} \quad h \geq 0 \quad \text{pero} \quad h \neq 0.$$

De forma similar, dado  $u, v \in \mathcal{C}(\bar{D})$ , se dice que

$$(u, v) > (0, 0) \quad \text{si} \quad u \geq 0, \text{ y } v \geq 0 \quad \text{pero} \quad (u, v) \neq (0, 0),$$

y, dado  $u_j, v_j \in \mathcal{C}(\bar{D})$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , se dice que

$$(u_1, v_1) > (u_2, v_2) \quad \text{si} \quad (u_1 - u_2, v_1 - v_2) > (0, 0).$$

Además, para cualquier  $u, v \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$ , se dice que

$$(u, v) \gg (0, 0) \quad \text{si} \quad u \gg 0 \quad \text{y} \quad v \gg 0,$$

y, como antes, dado  $u_j, v_j \in \mathcal{C}^1(\bar{D})$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , se dice que

$$(u_1, v_1) \gg (u_2, v_2) \quad \text{si} \quad (u_1 - u_2, v_1 - v_2) \gg (0, 0).$$

También, dados dos espacios de Banach  $U$  y  $V$  y un operador lineal y continuo  $T \in \mathcal{L}(U, V)$ , denotaremos por  $N[T]$  y  $R[T]$  el núcleo (kernel) y el rango (imagen) de  $T$ , respectivamente.

Este capítulo está distribuido de la siguiente manera. La Sección 1.2 muestra un resultado de caracterización del Principio del Máximo en términos de la positividad del autovalor principal y la existencia de una supersolución positiva en sentido estricto para Sistemas Cooperativos proveniente de [48]. También, se prueban algunas propiedades de los autovalores que van a resultar esenciales a lo largo de esta Memoria y en particular en la demostración del Teorema 1.1. La Sección 1.3 consta de la demostración del Teorema 1.1. En la Sección 1.4 se prueba que (1.1.6) es obtenido si las medidas de Lebesgue de  $\Omega_{0,2}$  y  $\Omega_+^0$ , que las denotaremos por  $|\Omega_{0,2}|$  y  $|\Omega_+^0|$  respectivamente, son suficientemente pequeñas. Finalmente, la Sección 1.5 proporciona un ejemplo de ecuaciones diferenciales ordinarias con el cual un caso especial del Teorema 1.1 es resuelto bajo unas determinadas condiciones especiales.

## 1.2 Principio del Máximo y autovalores principales

La siguiente caracterización del Principio del Máximo Fuerte proviene de López-Gómez & Molina-Meyer [48] (consultar la discusión de Amann [7] y las referencias allí incluidas). La demostración completa para una ecuación fue realizada en [38, Sección 2]. Este resultado será de extrema importancia a lo largo de esta Memoria.

**Teorema 1.2** *Supongamos que  $D$  es un subdominio abierto y suave de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , y  $V_1, V_2 \in C^\nu(\bar{D})$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a)  $\sigma[\mathcal{S}(V_1, V_2), D] > 0$ .
- (b) *Existen  $\bar{u}, \bar{v} \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  tal que  $\bar{u} > 0, \bar{v} > 0$  en  $D$ ,*

$$\mathcal{S}(V_1, V_2) \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } D,$$

*y, o  $(\bar{u}, \bar{v}) > (0, 0)$  en  $\partial D$ , o*

$$\mathcal{S}(V_1, V_2) \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } D;$$

*$(\bar{u}, \bar{v})$  se dice que es una supersolución positiva estricta de  $\mathcal{S}(V_1, V_2)$  en  $D$ .*

- (c) *El operador  $\mathcal{S}(V_1, V_2)$  satisface el Principio del Máximo fuerte en  $D$ , i.e., para cada  $f_1, f_2 \in C^\nu(\bar{D})$ ,  $h_1, h_2 \in C^{2+\nu}(\partial D)$ , y  $u, v \in C^{2+\nu}(\bar{D})$  se cumple que*

$$\begin{cases} \mathcal{S}(V_1, V_2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{en } D, \\ (u, v) = (h_1, h_2) \geq (0, 0) & \text{en } \partial D, \end{cases}$$

*con alguna de esas desigualdades estricta, de forma que uno tiene  $u \gg 0$  y  $v \gg 0$  en  $D$ . En particular, cualquier supersolución positiva estricta  $(\bar{u}, \bar{v})$  de  $\mathcal{S}(V_1, V_2)$  en  $D$  satisface  $(\bar{u}, \bar{v}) \gg (0, 0)$*

A continuación, pondremos

$$\mathfrak{L} := \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix} = \text{diag} \{L_1, L_2\}$$

y denotamos por  $\mathfrak{C}_2$  el conjunto de matrices cuadradas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega})) \quad (1.2.1)$$

de orden 2 con las distintas componentes pertenecientes a  $\mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega})$  tal que

$$a_{12}(x) > 0 \quad \text{y} \quad a_{21}(x) > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}. \quad (1.2.2)$$

Entonces, de acuerdo con [27, 66, 48, 7], para cada  $A \in \mathfrak{C}_2$  y algún subdominio  $D$  de  $\Omega$  de clase  $\mathcal{C}^{2,\nu}$ , existe un único valor de  $\tau$ , denotado por  $\sigma[\mathfrak{L} - A; D]$ , y denominado autovalor principal de  $\mathfrak{L} - A$  en  $D$  (bajo condiciones de frontera Dirichlet homogéneas), para el cual

$$\begin{cases} (L_1 - a_{11})\varphi - a_{12}\psi = \tau\varphi \\ (L_2 - a_{22})\psi - a_{21}\varphi = \tau\psi \\ (\varphi, \psi) = (0, 0) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{en } D, \\ \\ \text{en } \partial D, \end{matrix}$$

posee una solución  $(\varphi, \psi)$  con  $\varphi > 0$  y  $\psi > 0$ . Además,  $\sigma[\mathfrak{L} - A; D]$  es algebraicamente *simple* y *dominante* en el sentido de (1.1.8). El siguiente resultado recopila algunas propiedades de los autovalores principales provenientes de [27, 66, 48], aunque podrían ser consideradas nuevas en el marco establecido aquí. Por consiguiente, con el fin de establecerlo de la forma más completa, daremos una demostración auto-contenida de ellas basada en Teorema 1.2.

**Proposición 1.3** *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(a) Para cada  $A, B \in \mathfrak{C}_2$  tal que  $A \leq B$ ,  $A \neq B$ , la siguiente estimación es obtenida

$$\sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega] > \sigma[\mathfrak{L} - B; \Omega].$$

(b) Sean  $a_{12}, a_{21} \in \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega})$  de forma que satisfagan (1.2.2). Entonces, la aplicación

$$(a_{11}, a_{22}) \in Z := \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega}) \rightarrow \sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega] \in \mathbb{R},$$

donde  $A$  está dado por (1.2.1), es continua. En realidad, si  $(a_{11,n}, a_{22,n}) \in Z$ ,  $n \geq 1$ , es una sucesión tal que, para algún  $a_{11}, a_{22} \in \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega})$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{11,n}, a_{22,n}) = (a_{11}, a_{22}) \quad \text{uniformemente en } \bar{\Omega},$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma[\mathfrak{L} - A_n; \Omega] = \sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega], \quad (1.2.3)$$

donde

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11,n} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22,n} \end{pmatrix} \in \mathfrak{C}_2, \quad n \geq 1. \quad (1.2.4)$$

(c) Si  $\Omega_0$  es un subdominio propio de  $\Omega$  de clase  $\mathcal{C}^{2,\nu}$ , entonces, para cada  $A \in \mathfrak{C}_2$ ,

$$\sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega_0] > \sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega].$$

La propiedad (a) proviene de [48, Theorem 3.2] y normalmente es denominada como la *propiedad de monotonía del autovalor principal*  $\sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega]$  con respecto a la matriz potencial  $A$ . La propiedad (b) establece la *continuidad del autovalor principal con respecto al potencial*, y la propiedad (c) establece la *monotonía con respecto del dominio*.

**Demostración.** (a) Sean  $A, B \in \mathfrak{C}_2$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

tal que  $A \neq B$  y  $a_{ij} \leq b_{ij}$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ . Denotamos por  $(\varphi, \psi) \gg (0, 0)$  una autofunción principal asociada con  $\sigma[\mathfrak{L} - B; \Omega]$ . Entonces,  $(\varphi, \psi) = 0$  en  $\partial\Omega$ , y

$$(\mathfrak{L} - A - \sigma[\mathfrak{L} - B; \Omega] \operatorname{diag} \{1, 1\}) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = (B - A) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ya que  $B > A$ ,  $\varphi \gg 0$  y  $\psi \gg 0$  en  $\Omega$ . De esta manera,  $(\varphi, \psi)$  será una supersolución positiva estricta de

$$\tilde{\mathfrak{L}} := \mathfrak{L} - A - \sigma[\mathfrak{L} - B; \Omega] \operatorname{diag} \{1, 1\}$$

en  $\Omega$ , y, por lo tanto, de acuerdo con el Teorema 1.2,

$$0 < \sigma[\tilde{\mathfrak{L}}; \Omega] = \sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega] - \sigma[\mathfrak{L} - B; \Omega],$$

y por la unicidad, podemos concluir la demostración del apartado (a).

Ahora, probaremos (b). Tomamos la sucesión  $A_n$ ,  $n \geq 1$ , definida a través de (1.2.4) de forma que satisfaga todos los requerimientos del apartado (b) y con la estructura de (1.2.1). Entonces, para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  tal que, para cada  $n \geq n_0$ ,

$$A - \varepsilon \operatorname{diag} \{1, 1\} \leq A_n \leq A + \varepsilon \operatorname{diag} \{1, 1\}.$$

De manera que, por el apartado (a), tenemos que, para cualquier  $n \geq n_0$ ,

$$\sigma[\mathfrak{L} - A - \varepsilon \operatorname{diag} \{1, 1\}; \Omega] \leq \sigma[\mathfrak{L} - A_n; \Omega] \leq \sigma[\mathfrak{L} - A + \varepsilon \operatorname{diag} \{1, 1\}; \Omega].$$

Por consiguiente, por la unicidad del autovalor principal,

$$\sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega] - \varepsilon \leq \sigma[\mathfrak{L} - A_n; \Omega] \leq \sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega] + \varepsilon, \quad n \geq n_0,$$

lo que concluye la demostración.

Para probar el apartado (c), Suponemos que  $\Omega_0$  es un subdominio propio de  $\Omega$  de clase  $\mathcal{C}^{2,\nu}$  y  $A \in \mathfrak{C}_2$ . Sea  $(\varphi, \psi) \gg (0, 0)$  una autofunción principal asociada con  $\sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega]$ . Entonces, como

$$\partial\Omega_0 \cap \Omega \neq \emptyset,$$

resulta aparente que

$$(\varphi, \psi) > (0, 0) \quad \text{en} \quad \partial\Omega_0.$$

Además,

$$(\mathfrak{L} - A - \sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega] \operatorname{diag} \{1, 1\}) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

en  $\Omega_0$  y, por lo tanto,  $(\varphi, \psi)$  será una supersolución positiva estricta de

$$\hat{\mathfrak{L}} := \mathfrak{L} - A - \sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega] \operatorname{diag} \{1, 1\}$$

en  $\Omega_0$ . Por consiguiente, de acuerdo con el Teorema 1.2,

$$0 < \sigma[\hat{\mathfrak{L}}; \Omega_0] = \sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega_0] - \sigma[\mathfrak{L} - A; \Omega],$$

lo que concluye la demostración de la proposición. ■

Como una consecuencia inmediata de la Proposición 1.3, el siguiente resultado es obtenido.

**Corolario 1.4** *Supongamos (A1)-(A2). Entonces, la función real  $\sigma(\lambda)$  definida a través de (1.1.9) es continua, creciente y acotada por arriba. Por lo tanto, el límite*

$$\ell := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma(\lambda) \tag{1.2.5}$$

*está bien definido, i.e.,  $\ell \in \mathbb{R}$ . Además,*

$$\ell \leq \min \{ \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,1}], \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,2}] \}.$$

**Demostración.** La continuidad es consecuencia del apartado (b) de la Proposición 1.3. La monotonía proviene del apartado (a) de la Proposición 1.3. Ahora, tomamos  $k \in \{1, 2\}$ . Entonces, de acuerdo con el apartado (c) de la Proposición 1.3, tendremos que

$$\sigma(\lambda) = \sigma[\mathcal{S}(\lambda a, \lambda d); \Omega] < \sigma[\mathcal{S}(\lambda a, \lambda d); \Omega_{0,k}] = \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,k}],$$

ya que  $a = d = 0$  en  $\Omega_{0,k}$ . Esto finaliza la demostración.

■

### 1.3 Demostración del Teorema 1.1

Esta será la principal sección de este capítulo, en la que se llevará a cabo la demostración del Teorema 1.1. Debería ser recordado que, para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ , hemos denotado por  $(\varphi_\lambda, \psi_\lambda)$  como la única autofunción principal asociada con  $\sigma(\lambda) = \sigma[\mathcal{S}(\lambda a, \lambda d); \Omega]$  para el cual (1.1.10) es obtenido. Estas autofunciones satisfacen el siguiente resultado.

**Lema 1.5** *Existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi_\lambda|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \psi_\lambda|^2 \leq C \quad \text{para todo } \lambda > 0.$$

**Demostración.** Por (A1), para cada  $k \in \{1, 2\}$ , tendremos que

$$L_k = - \sum_{i,j=1}^N D_j (\alpha_{[ij,k]} D_i) + \sum_{i=1}^N \left( \alpha_{[i,k]} + \sum_{j=1}^N D_j \alpha_{[ij,k]} \right) D_i + \alpha_{[0,k]}.$$

Así que, poniendo

$$\mathfrak{a}_{[i,k]} := \alpha_{[i,k]} + \sum_{j=1}^N D_j \alpha_{[ij,k]}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad k = 1, 2,$$

tendremos que  $\mathfrak{a}_{[i,k]} \in \mathcal{C}^{1,\nu}(\bar{\Omega})$ ,  $1 \leq i \leq N$ , y  $L_k$  puede ser expresado de la forma siguiente

$$L_k = - \sum_{i,j=1}^N D_j (\alpha_{[ij,k]} D_i) + \sum_{i=1}^N \mathfrak{a}_{[i,k]} D_i + \alpha_{[0,k]}, \quad k = 1, 2.$$

A continuación, haremos uso del hecho que, para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} L_1 \varphi_\lambda &= -\lambda a \varphi_\lambda + b \psi_\lambda + \sigma(\lambda) \varphi_\lambda, \\ L_2 \psi_\lambda &= -\lambda d \psi_\lambda + c \varphi_\lambda + \sigma(\lambda) \psi_\lambda. \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Multiplicando la primera ecuación de (1.3.1) por  $\varphi_\lambda$ , la segunda por  $\psi_\lambda$ , integrando las identidades resultantes en  $\Omega$ , y sumando lo obtenido, obtendremos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \alpha_{[ij,1]} D_i \varphi_\lambda D_j \varphi_\lambda + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \alpha_{[ij,2]} D_i \psi_\lambda D_j \psi_\lambda + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathfrak{a}_{[i,1]} \varphi_\lambda D_i \varphi_\lambda \\ & \quad + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathfrak{a}_{[i,2]} \psi_\lambda D_i \psi_\lambda + \int_{\Omega} \alpha_{[0,1]} \varphi_\lambda^2 + \int_{\Omega} \alpha_{[0,2]} \psi_\lambda^2 \\ &= -\lambda \left( \int_{\Omega} a \varphi_\lambda^2 + \int_{\Omega} d \psi_\lambda^2 \right) + \int_{\Omega} (b + c) \varphi_\lambda \psi_\lambda + \sigma(\lambda) \int_{\Omega} (\varphi_\lambda^2 + \psi_\lambda^2). \end{aligned}$$

De manera que, debido a (1.1.10) y al Corolario 1.4, y aplicando la desigualdad de Hölder tendremos que existe una constante  $C_1 > 0$  tal que, para cada  $\lambda > 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \alpha_{[ij,1]} D_i \varphi_{\lambda} D_j \varphi_{\lambda} + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \alpha_{[ij,2]} D_i \psi_{\lambda} D_j \psi_{\lambda} \\ \leq C_1 - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,1]} \varphi_{\lambda} D_i \varphi_{\lambda} - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,2]} \psi_{\lambda} D_i \psi_{\lambda}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, por (1.1.3), tendremos que

$$\mu_1 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_{\lambda}|^2 + \mu_2 \int_{\Omega} |\nabla \psi_{\lambda}|^2 \leq C_1 + \int_{\Omega} \langle \mathbf{a}_1, \nabla \varphi_{\lambda} \rangle |\varphi_{\lambda}| + \int_{\Omega} \langle \mathbf{a}_2, \nabla \psi_{\lambda} \rangle |\psi_{\lambda}|,$$

donde hemos denotado

$$\mathbf{a}_k := (\mathbf{a}_{[1,k]}, \mathbf{a}_{[2,k]}, \dots, \mathbf{a}_{[N,k]}), \quad k = 1, 2, \quad (1.3.2)$$

y, por lo tanto, existe una constante  $C_2 > 0$ , tal que, para cualquier  $\lambda > 0$ , la siguiente estimación es obtenida

$$\mu_1 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_{\lambda}|^2 + \mu_2 \int_{\Omega} |\nabla \psi_{\lambda}|^2 \leq C_1 + C_2 \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi_{\lambda}| |\varphi_{\lambda}| + \int_{\Omega} |\nabla \psi_{\lambda}| |\psi_{\lambda}| \right). \quad (1.3.3)$$

Por otro lado, para cada  $\eta > 0$ ,  $\lambda > 0$ , y  $u \in \{\varphi_{\lambda}, \psi_{\lambda}\}$ ,

$$u |\nabla u| = \eta u \frac{|\nabla u|}{\eta} \leq \frac{\eta^2}{2} u^2 + \frac{1}{2\eta^2} |\nabla u|^2, \quad (1.3.4)$$

y, por eso, sustituyendo estas desigualdades en (1.3.3) vemos que

$$\mu_1 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_{\lambda}|^2 + \mu_2 \int_{\Omega} |\nabla \psi_{\lambda}|^2 \leq C_1 + C_2 \frac{\eta^2}{2} + \frac{C_2}{2\eta^2} \int_{\Omega} (|\nabla \varphi_{\lambda}|^2 + |\nabla \psi_{\lambda}|^2). \quad (1.3.5)$$

Eligiendo cualquier  $\eta$  tal que

$$\min\{\mu_1, \mu_2\} > \frac{C_2}{2\eta^2},$$

resulta aparente que a partir de (1.3.5) finalizaremos la demostración del lema.

■

Sea  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  alguna sucesión creciente no acotada, i.e., tal que  $0 < \lambda_n < \lambda_m$  si  $n < m$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Entonces, para cada  $n \geq 1$ ,

$$\int_{\Omega} (\varphi_{\lambda_n}^2 + \psi_{\lambda_n}^2) = 1, \quad (1.3.6)$$

y, debido al Lema 1.5,  $\{(\varphi_{\lambda_n}, \psi_{\lambda_n})\}_{n \geq 1}$ , es acotada en

$$X := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega).$$

Puesto que la inclusión

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

es compacta, existe una subsucesión de  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ , que denotaremos de nuevo por  $n$ , y  $\varphi_{\omega}, \psi_{\omega} \in L^2(\Omega)$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\varphi_{\lambda_n}, \psi_{\lambda_n}) - (\varphi_{\omega}, \psi_{\omega})\|_Y = 0, \quad Y := L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

A continuación, probaremos que  $\{(\varphi_{\lambda_n}, \psi_{\lambda_n})\}_{n \geq 1}$  es en realidad una sucesión de Cauchy en  $X$ . Esto implica que  $(\varphi_{\omega}, \psi_{\omega}) \in X$  y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\varphi_{\lambda_n}, \psi_{\lambda_n}) - (\varphi_{\omega}, \psi_{\omega})\|_X = 0. \quad (1.3.7)$$

Fijamos  $n < m$ , y ponemos

$$D_{n,m} := \mu_1 \int_{\Omega} |\nabla(\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m})|^2 + \mu_2 \int_{\Omega} |\nabla(\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m})|^2. \quad (1.3.8)$$

De acuerdo con (1.1.3),

$$\begin{aligned} D_{n,m} &\leq \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \alpha_{[ij,1]} D_i(\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m}) D_j(\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m}) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \alpha_{[ij,2]} D_i(\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}) D_j(\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}) \\ &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \alpha_{[ij,1]} \{D_i \varphi_{\lambda_n} D_j \varphi_{\lambda_n} + D_i \varphi_{\lambda_m} D_j \varphi_{\lambda_m} - 2D_i \varphi_{\lambda_n} D_j \varphi_{\lambda_m}\} \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \alpha_{[ij,2]} \{D_i \psi_{\lambda_n} D_j \psi_{\lambda_n} + D_i \psi_{\lambda_m} D_j \psi_{\lambda_m} - 2D_i \psi_{\lambda_n} D_j \psi_{\lambda_m}\}, \end{aligned}$$



y, por tanto, integrando por partes en  $\Omega$ , llegamos a

$$\begin{aligned}
D_{n,m} \leq & - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_n} D_j(\alpha_{[ij,1]} D_i \varphi_{\lambda_n}) - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_m} D_j(\alpha_{[ij,1]} D_i \varphi_{\lambda_m}) \\
& + 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_m} D_j(\alpha_{[ij,1]} D_i \varphi_{\lambda_n}) \\
& - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \psi_{\lambda_n} D_j(\alpha_{[ij,2]} D_i \psi_{\lambda_n}) - \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \psi_{\lambda_m} D_j(\alpha_{[ij,2]} D_i \psi_{\lambda_m}) \\
& + 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \psi_{\lambda_m} D_j(\alpha_{[ij,2]} D_i \psi_{\lambda_n}),
\end{aligned}$$

porque, para cualquier  $h \geq 1$ ,

$$\varphi_{\lambda_h} = \psi_{\lambda_h} = 0 \quad \text{in } \partial\Omega.$$

Señalar que esa desigualdad puede ser equivalentemente escrita en la forma siguiente

$$\begin{aligned}
D_{n,m} \leq & \int_{\Omega} \left( L_1 \varphi_{\lambda_n} - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{[i,1]} D_i \varphi_{\lambda_n} - \alpha_{[0,1]} \varphi_{\lambda_n} \right) \varphi_{\lambda_n} \\
& + \int_{\Omega} \left( L_1 \varphi_{\lambda_m} - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{[i,1]} D_i \varphi_{\lambda_m} - \alpha_{[0,1]} \varphi_{\lambda_m} \right) \varphi_{\lambda_m} \\
& - 2 \int_{\Omega} \left( L_1 \varphi_{\lambda_n} - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{[i,1]} D_i \varphi_{\lambda_n} - \alpha_{[0,1]} \varphi_{\lambda_n} \right) \varphi_{\lambda_m} \\
& + \int_{\Omega} \left( L_2 \psi_{\lambda_n} - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{[i,2]} D_i \psi_{\lambda_n} - \alpha_{[0,2]} \psi_{\lambda_n} \right) \psi_{\lambda_n} \\
& + \int_{\Omega} \left( L_2 \psi_{\lambda_m} - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{[i,2]} D_i \psi_{\lambda_m} - \alpha_{[0,2]} \psi_{\lambda_m} \right) \psi_{\lambda_m} \\
& - 2 \int_{\Omega} \left( L_2 \psi_{\lambda_n} - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{[i,2]} D_i \psi_{\lambda_n} - \alpha_{[0,2]} \psi_{\lambda_n} \right) \psi_{\lambda_m}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, por (1.3.1), obtenemos que

$$\begin{aligned}
D_{n,m} \leq & \int_{\Omega} \left( \sigma(\lambda_n) \varphi_{\lambda_n} - \lambda_n a \varphi_{\lambda_n} - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{[i,1]} D_i \varphi_{\lambda_n} - \alpha_{[0,1]} \varphi_{\lambda_n} + b \psi_{\lambda_n} \right) \varphi_{\lambda_n} \\
& + \int_{\Omega} \left( \sigma(\lambda_m) \varphi_{\lambda_m} - \lambda_m a \varphi_{\lambda_m} - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{[i,1]} D_i \varphi_{\lambda_m} - \alpha_{[0,1]} \varphi_{\lambda_m} + b \psi_{\lambda_m} \right) \varphi_{\lambda_m} \\
& - 2 \int_{\Omega} \left( \sigma(\lambda_n) \varphi_{\lambda_n} - \lambda_n a \varphi_{\lambda_n} - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{[i,1]} D_i \varphi_{\lambda_n} - \alpha_{[0,1]} \varphi_{\lambda_n} + b \psi_{\lambda_n} \right) \varphi_{\lambda_m} \\
& + \int_{\Omega} \left( \sigma(\lambda_n) \psi_{\lambda_n} - \lambda_n d \psi_{\lambda_n} - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{[i,2]} D_i \psi_{\lambda_n} - \alpha_{[0,2]} \psi_{\lambda_n} + c \varphi_{\lambda_n} \right) \psi_{\lambda_n} \\
& + \int_{\Omega} \left( \sigma(\lambda_m) \psi_{\lambda_m} - \lambda_m d \psi_{\lambda_m} - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{[i,2]} D_i \psi_{\lambda_m} - \alpha_{[0,2]} \psi_{\lambda_m} + c \varphi_{\lambda_m} \right) \psi_{\lambda_m} \\
& - 2 \int_{\Omega} \left( \sigma(\lambda_n) \psi_{\lambda_n} - \lambda_n d \psi_{\lambda_n} - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_{[i,2]} D_i \psi_{\lambda_n} - \alpha_{[0,2]} \psi_{\lambda_n} + c \varphi_{\lambda_n} \right) \psi_{\lambda_m}.
\end{aligned}$$

De manera que, organizando términos, llegamos a la desigualdad

$$\begin{aligned}
D_{n,m} \leq & \sigma(\lambda_n) \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_n} (\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m}) + \sigma(\lambda_n) \int_{\Omega} \psi_{\lambda_n} (\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}) \\
& + \sigma(\lambda_m) \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_m} (\varphi_{\lambda_m} - \varphi_{\lambda_n}) - \int_{\Omega} \alpha_{[0,1]} (\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m})^2 \\
& + \sigma(\lambda_m) \int_{\Omega} \psi_{\lambda_m} (\psi_{\lambda_m} - \psi_{\lambda_n}) - \int_{\Omega} \alpha_{[0,2]} (\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m})^2 \\
& + (\sigma(\lambda_m) - \sigma(\lambda_n)) \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_n} \varphi_{\lambda_m} + (\sigma(\lambda_m) - \sigma(\lambda_n)) \int_{\Omega} \psi_{\lambda_n} \psi_{\lambda_m} \\
& + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,1]} (\varphi_{\lambda_m} - \varphi_{\lambda_n}) D_i \varphi_{\lambda_n} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,1]} \varphi_{\lambda_m} D_i (\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m}) \\
& + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,2]} (\psi_{\lambda_m} - \psi_{\lambda_n}) D_i \psi_{\lambda_n} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,2]} \psi_{\lambda_m} D_i (\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}) \\
& + \int_{\Omega} (\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m}) (b \psi_{\lambda_n} - c \psi_{\lambda_m}) + \int_{\Omega} (\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}) (c \varphi_{\lambda_n} - b \varphi_{\lambda_m}) + R_{n,m},
\end{aligned}$$

donde hemos denotado

$$\begin{aligned}
R_{n,m} := & -\lambda_n \int_{\Omega} a \varphi_{\lambda_n}^2 - \lambda_m \int_{\Omega} a \varphi_{\lambda_m}^2 + 2\lambda_n \int_{\Omega} a \varphi_{\lambda_n} \varphi_{\lambda_m} \\
& - \lambda_n \int_{\Omega} d \psi_{\lambda_n}^2 - \lambda_m \int_{\Omega} d \psi_{\lambda_m}^2 + 2\lambda_n \int_{\Omega} d \psi_{\lambda_n} \psi_{\lambda_m}.
\end{aligned}$$

Obviamente,

$$\begin{aligned} R_{n,m} = & -\lambda_n \int_{\Omega} a(\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m})^2 + (\lambda_n - \lambda_m) \int_{\Omega} a\varphi_{\lambda_m}^2 \\ & - \lambda_n \int_{\Omega} d(\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m})^2 + (\lambda_n - \lambda_m) \int_{\Omega} d\psi_{\lambda_m}^2 \leq 0, \end{aligned}$$

porque, por construcción,  $n < m$  implica que  $\lambda_n < \lambda_m$ . Además, integrando por partes en  $\Omega$  tendremos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,1]} \varphi_{\lambda_m} D_i(\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m}) &= - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m}) D_i(\mathbf{a}_{[i,1]} \varphi_{\lambda_m}), \\ \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,2]} \psi_{\lambda_m} D_i(\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}) &= - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}) D_i(\mathbf{a}_{[i,2]} \psi_{\lambda_m}). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D_{n,m} \leq & \sigma(\lambda_n) \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m}) + \sigma(\lambda_n) \int_{\Omega} \psi_{\lambda_n}(\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}) \\ & + \sigma(\lambda_m) \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_m}(\varphi_{\lambda_m} - \varphi_{\lambda_n}) - \int_{\Omega} \alpha_{[0,1]}(\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m})^2 \\ & + \sigma(\lambda_m) \int_{\Omega} \psi_{\lambda_m}(\psi_{\lambda_m} - \psi_{\lambda_n}) - \int_{\Omega} \alpha_{[0,2]}(\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m})^2 \\ & + (\sigma(\lambda_m) - \sigma(\lambda_n)) \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_n} \varphi_{\lambda_m} + (\sigma(\lambda_m) - \sigma(\lambda_n)) \int_{\Omega} \psi_{\lambda_n} \psi_{\lambda_m} \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,1]}(\varphi_{\lambda_m} - \varphi_{\lambda_n}) D_i \varphi_{\lambda_n} - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m}) D_i(\mathbf{a}_{[i,1]} \varphi_{\lambda_m}) \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,2]}(\psi_{\lambda_m} - \psi_{\lambda_n}) D_i \psi_{\lambda_n} - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}) D_i(\mathbf{a}_{[i,2]} \psi_{\lambda_m}) \\ & + \int_{\Omega} (\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m})(b\psi_{\lambda_n} - c\psi_{\lambda_m}) + \int_{\Omega} (\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m})(c\varphi_{\lambda_n} - b\varphi_{\lambda_m}). \end{aligned} \tag{1.3.9}$$

De acuerdo con (1.3.6), a partir de la desigualdad de Hölder obtendremos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m}) + \int_{\Omega} \psi_{\lambda_n}(\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}) \right| &\leq \|(\varphi_{\lambda_n}, \psi_{\lambda_n}) - (\varphi_{\lambda_m}, \psi_{\lambda_m})\|_Y, \\ \left| \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_m}(\varphi_{\lambda_m} - \varphi_{\lambda_n}) + \int_{\Omega} \psi_{\lambda_m}(\psi_{\lambda_m} - \psi_{\lambda_n}) \right| &\leq \|(\varphi_{\lambda_m}, \psi_{\lambda_m}) - (\varphi_{\lambda_n}, \psi_{\lambda_n})\|_Y, \end{aligned}$$

donde estamos denotando  $Y := L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ . Además,

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \alpha_{[0,1]} (\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m})^2 &\leq - \inf_{\Omega} \alpha_{[0,1]} \|\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ - \int_{\Omega} \alpha_{[0,2]} (\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m})^2 &\leq - \inf_{\Omega} \alpha_{[0,2]} \|\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \left| [\sigma(\lambda_m) - \sigma(\lambda_n)] \int_{\Omega} (\varphi_{\lambda_n} \varphi_{\lambda_m} + \psi_{\lambda_n} \psi_{\lambda_m}) \right| &\leq 2 |\sigma(\lambda_m) - \sigma(\lambda_n)|, \end{aligned}$$

y, haciendo uso de (1.3.2), así como de la desigualdad de Hölder y el Lema 1.5, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,1]} (\varphi_{\lambda_m} - \varphi_{\lambda_n}) D_i \varphi_{\lambda_n} \right| &= \left| \int_{\Omega} \langle \mathbf{a}_1, \nabla \varphi_{\lambda_n} \rangle (\varphi_{\lambda_m} - \varphi_{\lambda_n}) \right| \\ &\leq C_1 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_{\lambda_n}| |\varphi_{\lambda_m} - \varphi_{\lambda_n}| \leq C_2 \|\varphi_{\lambda_m} - \varphi_{\lambda_n}\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

para algunas constantes positivas  $C_1 > 0$  y  $C_2 > 0$ , cuyo conocimiento explícito no tiene importancia en este desarrollo. Similarmente, existen unas constantes  $C_3 > 0, \dots, C_7 > 0$ , tal que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,2]} (\psi_{\lambda_m} - \psi_{\lambda_n}) D_i \psi_{\lambda_n} \right| &\leq C_3 \|\psi_{\lambda_m} - \psi_{\lambda_n}\|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m}) D_i (\mathbf{a}_{[i,1]} \varphi_{\lambda_m}) \right| &\leq C_4 \|\varphi_{\lambda_m} - \varphi_{\lambda_n}\|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} (\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}) D_i (\mathbf{a}_{[i,2]} \psi_{\lambda_m}) \right| &\leq C_5 \|\psi_{\lambda_m} - \psi_{\lambda_n}\|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \int_{\Omega} (\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m}) (b\psi_{\lambda_n} - c\psi_{\lambda_m}) \right| &\leq C_6 \|\varphi_{\lambda_m} - \varphi_{\lambda_n}\|_{L^2(\Omega)}, \\ \left| \int_{\Omega} (\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}) (c\varphi_{\lambda_n} - b\varphi_{\lambda_m}) \right| &\leq C_7 \|\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

De esta manera, sustituyendo estas desigualdades en (1.3.9) y utilizando (1.2.5), encontraremos que existe una constante  $C_8 > 0$  tal que

$$D_{n,m} \leq C_8 \left( \|\varphi_{\lambda_m} - \varphi_{\lambda_n}\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi_{\lambda_m} - \psi_{\lambda_n}\|_{L^2(\Omega)} \right) + 2|\sigma(\lambda_m) - \sigma(\lambda_n)|. \quad (1.3.10)$$

Por consiguiente, desde (1.3.8) y (1.3.10) resulta aparente que existe una constante  $C = C(\eta) > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\lambda_m})|^2 + \int_{\Omega} |\nabla(\psi_{\lambda_n} - \psi_{\lambda_m})|^2 &\leq C |\sigma(\lambda_m) - \sigma(\lambda_n)| \\ &\quad + C \left( \|\varphi_{\lambda_m} - \varphi_{\lambda_n}\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi_{\lambda_m} - \psi_{\lambda_n}\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Esto muestra que, de hecho,  $\{(\varphi_{\lambda_n}, \psi_{\lambda_n})\}_{n \geq 1}$  es una sucesión de Cauchy en  $X$ . Por lo tanto, (1.3.7) es obtenido. Señalar que, tomando límites, también obtenemos que

$$(\varphi_\omega, \psi_\omega) \geq (0, 0) \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} (\varphi_\omega^2 + \psi_\omega^2) = 1. \quad (1.3.11)$$

A continuación, probaremos que

$$\varphi_\omega = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_+^a \quad \text{y} \quad \psi_\omega = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_+^d. \quad (1.3.12)$$

De acuerdo con la demostración del Lema 1.5 sabemos que, para cada  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \alpha_{[ij,1]} D_i \varphi_{\lambda_n} D_j \varphi_{\lambda_n} + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \alpha_{[ij,2]} D_i \psi_{\lambda_n} D_j \psi_{\lambda_n} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,1]} \varphi_{\lambda_n} D_i \varphi_{\lambda_n} \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,2]} \psi_{\lambda_n} D_i \psi_{\lambda_n} + \int_{\Omega} \alpha_{[0,1]} \varphi_{\lambda_n}^2 + \int_{\Omega} \alpha_{[0,2]} \psi_{\lambda_n}^2 \\ & = -\lambda_n \left( \int_{\Omega} a \varphi_{\lambda_n}^2 + \int_{\Omega} d \psi_{\lambda_n}^2 \right) + \int_{\Omega} (b + c) \varphi_{\lambda_n} \psi_{\lambda_n} + \sigma(\lambda_n). \end{aligned}$$

De acuerdo con (1.3.7) y el Corolario 1.4, tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$  en esta identidad, el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue nos asegura que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (a \varphi_{\lambda_n}^2 + d \psi_{\lambda_n}^2) = 0,$$

para cada  $\lambda_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por otro lado, por la desigualdad de Hölder, obtendremos desde (1.3.6) y (1.3.11) que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} a \varphi_{\lambda_n}^2 - \int_{\Omega} a \varphi_{\omega}^2 \right| & \leq \int_{\Omega} a (\varphi_{\lambda_n} + \varphi_{\omega}) |\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\omega}| \\ & \leq \max_{\Omega} a \cdot \|\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\omega}\|_{L^2(\Omega)} \left( \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_n}^2 + \int_{\Omega} \varphi_{\omega}^2 + 2 \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_n} \varphi_{\omega} \right)^{1/2} \\ & \leq 2 \max_{\Omega} a \cdot \|\varphi_{\lambda_n} - \varphi_{\omega}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\left| \int_{\Omega} d \psi_{\lambda_n}^2 - \int_{\Omega} d \psi_{\omega}^2 \right| \leq 2 \max_{\Omega} d \cdot \|\psi_{\lambda_n} - \psi_{\omega}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Omega} (a \varphi_{\omega}^2 + d \psi_{\omega}^2) = 0,$$

lo que concluye la demostración de (1.3.12). En particular,

$$(\varphi_{\omega}, \psi_{\omega}) = (0, 0) \quad \text{en} \quad \Omega_+^a \cap \Omega_+^d.$$

A continuación, puesto que  $\bar{\Omega}_+^0 \subset \Omega_+$ , probaremos que (1.3.12) implica que

$$(\varphi_\omega, \psi_\omega)|_{\Omega_{0,k}} \in H_0^1(\Omega_{0,k}) \times H_0^1(\Omega_{0,k}), \quad k \in \{1, 2\}. \quad (1.3.13)$$

De hecho, para cada  $k \in \{1, 2\}$  y  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, consideramos el conjunto abierto

$$\Omega_{\delta,k} := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega_{0,k}) < \delta\}.$$

De acuerdo con (1.3.12) y la suposición (A2),

$$(\varphi_\omega, \psi_\omega)|_{\Omega_{\delta,k}} \in H_0^1(\Omega_{\delta,k}) \times H_0^1(\Omega_{\delta,k}), \quad k \in \{1, 2\},$$

y, por eso, existe  $\delta_0 > 0$  tal que

$$(\varphi_\omega, \psi_\omega) \in \bigcap_{0 < \delta < \delta_0} (H_0^1(\Omega_{\delta,k}) \times H_0^1(\Omega_{\delta,k})), \quad k \in \{1, 2\}.$$

Por otro lado, ya que  $\Omega_{0,1}$  y  $\Omega_{0,2}$  son dos subdominios suaves de  $\Omega$ , estables en el sentido de Babuška y Vrborný [8] (cf. López-Gómez [38]), obtenemos que,

$$H_0^1(\Omega_{0,k}) \times H_0^1(\Omega_{0,k}) = \bigcap_{0 < \delta < \delta_0} (H_0^1(\Omega_{\delta,k}) \times H_0^1(\Omega_{\delta,k})), \quad k \in \{1, 2\},$$

lo que concluye la demostración de (1.3.13). Similarmente, de acuerdo con (1.3.12) resulta aparente que

$$\varphi_\omega \in H_0^1(\Omega_+^d \cap \Omega_+^0) \quad \text{y} \quad \psi_\omega \in H_0^1(\Omega_+^a \cap \Omega_+^0),$$

puesto que  $\varphi_\omega$  y  $\psi_\omega$  se anulan fuera de las correspondientes regiones.

Sea  $(\varphi_0, \psi_0) \gg (0, 0)$  en  $\Omega_+^0$  tal que

$$\mathcal{S}_0 \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} = \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_+^0] \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \Omega_+^0, \quad (\varphi_0, \psi_0) = (0, 0) \quad \text{en} \quad \partial\Omega_+^0, \quad (1.3.14)$$

donde

$$\mathcal{S}_0 := \begin{pmatrix} L_1 & -b \\ -c & L_2 \end{pmatrix}.$$

De acuerdo con la primera ecuación de (1.3.14),

$$L_1\varphi_0 - \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_+^0]\varphi_0 = b\psi_0 > 0,$$

y, por tanto, el Teorema 1.2 implica que

$$\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_+^0] < \sigma[L_1; \Omega_+^0].$$

Similarmente, para la segunda ecuación de (1.3.14), concluimos que

$$\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_+^0] < \sigma[L_j; \Omega_+^0], \quad j \in \{1, 2\}. \quad (1.3.15)$$

A continuación, tomamos una función test

$$\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_+^d \cap \Omega_+^0),$$

y, particularizamos (1.3.1) en  $\lambda = \lambda_n$ ,  $n \geq 1$ . Entonces, multiplicando su primera ecuación por  $\eta$  e integrando en  $\Omega$  obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_+^d \cap \Omega_+^0} \alpha_{[ij,1]} D_i \eta D_j \varphi_{\lambda_n} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_+^d \cap \Omega_+^0} \mathbf{a}_{[i,1]} \eta D_i \varphi_{\lambda_n} + \int_{\Omega_+^d \cap \Omega_+^0} \alpha_{[0,1]} \varphi_{\lambda_n} \eta \\ = \int_{\Omega_+^d \cap \Omega_+^0} b \psi_{\lambda_n} \eta + \sigma(\lambda_n) \int_{\Omega_+^d \cap \Omega_+^0} \eta \varphi_{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Por (1.3.12) pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$  en estas identidades muestra que  $\varphi_\omega|_{\Omega_+^d \cap \Omega_+^0}$  es una solución débil del problema

$$L_1 \varphi = \ell \varphi \quad \text{en} \quad \Omega_+^d \cap \Omega_+^0, \quad \varphi = 0 \quad \text{en} \quad \partial \Omega_+^d \cap \Omega_+^0.$$

donde  $\ell$  viene dado a través de (1.2.5). Además, por (1.3.15), el Teorema 1.2, la Proposición 1.3(c) y debido a (1.1.6)

$$\ell < \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_+^0] < \sigma[L_1; \Omega_+^0] < \sigma[L_1; \Omega_+^d \cap \Omega_+^0].$$

De esta manera, tenemos que

$$\varphi_\omega = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_+^a \cap \Omega_+^0.$$

Consecuentemente,

$$\varphi_\omega = 0 \quad \text{en} \quad \Omega_+^a \cup \Omega_+^d. \quad (1.3.16)$$

Similarmente, tomando una función test

$$\nu \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_+^a \cap \Omega_+^0),$$

multiplicando la segunda ecuación de (1.3.1) particularizada en  $\lambda = \lambda_n$ ,  $n \geq 1$ , por  $\nu$  e integrando en  $\Omega$  obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_+^a \cap \Omega_+^0} \alpha_{[ij,2]} D_i \nu D_j \psi_{\lambda_n} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_+^a \cap \Omega_+^0} \mathbf{a}_{[i,2]} \nu D_i \psi_{\lambda_n} + \int_{\Omega_+^a \cap \Omega_+^0} \alpha_{[0,2]} \psi_{\lambda_n} \nu \\ = \int_{\Omega_+^a \cap \Omega_+^0} c \varphi_{\lambda_n} \nu + \sigma(\lambda_n) \int_{\Omega_+^a \cap \Omega_+^0} \nu \psi_{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Por tanto, pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$  y debido a (1.3.12), resulta aparente que  $\psi_\omega|_{\Omega_+^a \cap \Omega_+^0}$  es un solución débil del problema

$$L_2\psi = \ell\psi \quad \text{en } \Omega_+^a \cap \Omega_+^0, \quad \psi = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_+^a \cap \Omega_+^0.$$

Entonces, gracias de nuevo a (1.1.6), (1.3.15) y al Teorema 1.2 obtenemos que

$$\psi_\omega = 0 \quad \text{en } \Omega_+^a \cap \Omega_+^0.$$

De esta manera,

$$\psi_\omega = 0 \quad \text{en } \Omega_+^a \cup \Omega_+^d, \quad (1.3.17)$$

y, por lo tanto, podemos concluir que

$$(\varphi_\omega, \psi_\omega) = (0, 0) \quad \text{en } \Omega_+^a \cup \Omega_+^d.$$

Seguidamente, tomamos  $k \in \{1, 2\}$  y una función test

$$(\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_{0,k}) \times \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_{0,k}).$$

Particularizando (1.3.1) en  $\lambda = \lambda_n$ ,  $n \geq 1$ , multiplicando la primera ecuación por  $\xi_1$ , la segunda por  $\xi_2$ , e integrando la igualdades resultantes en  $\Omega_{0,k}$  tendremos

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{0,k}} \alpha_{[ij,1]} D_i \xi_1 D_j \varphi_{\lambda_n} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_{0,k}} \mathbf{a}_{[i,1]} \xi_1 D_i \varphi_{\lambda_n} + \int_{\Omega_{0,k}} \alpha_{[0,1]} \varphi_{\lambda_n} \xi_1 \\ &= \int_{\Omega_{0,k}} b \psi_{\lambda_n} \xi_1 + \sigma(\lambda_n) \int_{\Omega_{0,k}} \xi_1 \varphi_{\lambda_n}, \\ & \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega_{0,k}} \alpha_{[ij,2]} D_i \xi_2 D_j \psi_{\lambda_n} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_{0,k}} \mathbf{a}_{[i,2]} \xi_2 D_i \psi_{\lambda_n} + \int_{\Omega_{0,k}} \alpha_{[0,2]} \psi_{\lambda_n} \xi_2 \\ &= \int_{\Omega_{0,k}} c \varphi_{\lambda_n} \xi_2 + \sigma(\lambda_n) \int_{\Omega_{0,k}} \xi_2 \psi_{\lambda_n}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, pasando al límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , es aparente que  $(\varphi_\omega, \psi_\omega)|_{\Omega_{0,k}}$  será una solución débil del problema

$$\mathcal{S}_0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \quad \text{en } \Omega_{0,k}, \quad (\varphi, \psi) = (0, 0) \quad \text{en } \partial\Omega_{0,k}, \quad (1.3.18)$$

donde  $\ell$  viene dado de nuevo mediante (1.2.5). Por regularidad elíptica, es sencillo llegar a la conclusión que

$$(\varphi_\omega, \psi_\omega)|_{\Omega_{0,k}} \in \mathcal{C}^{2,\nu}(\bar{\Omega}_{0,k}) \times \mathcal{C}^{2,\nu}(\bar{\Omega}_{0,k}), \quad k \in \{1, 2\},$$



es una solución clásica de (1.3.18). Señalar que, debido a (1.3.11),

$$(\varphi_\omega, \psi_\omega) > (0, 0) \quad \text{en } \Omega_{0,1} \cup \Omega_{0,2}.$$

Además, para cada  $k \in \{1, 2\}$ , o

$$\varphi_\omega = \psi_\omega = 0 \quad \text{en } \Omega_{0,k},$$

ó

$$\varphi_\omega > 0 \quad \text{y} \quad \psi_\omega > 0 \quad \text{en } \Omega_{0,k}.$$

De hecho, si, por ejemplo,

$$\varphi_\omega = 0 \quad \text{en } \Omega_{0,k},$$

entonces,

$$b\psi_\omega = 0 \quad \text{en } \Omega_{0,k},$$

lo que implica que

$$\psi_\omega = 0.$$

Similarmente,  $\varphi_\omega = 0$  en  $\Omega_{0,k}$  si  $\psi_\omega = 0$  en ese mismo subdominio. Por lo tanto, de acuerdo con (1.1.6), tendremos que

$$\ell < \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,2}],$$

y, por eso, concluimos desde el Teorema 1.2 y el Corolario 1.4 que

$$(\varphi_\omega, \psi_\omega) = (0, 0) \quad \text{en } \Omega_{0,2}.$$

Además, necesariamente,

$$\ell = \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,1}],$$

y, por eso, (1.1.11) es obtenido. De hecho, si  $\ell < \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,1}]$ , entonces gracias al Teorema 1.2  $(\varphi_\omega, \psi_\omega) = (0, 0)$  en  $\Omega_{0,1}$ , y, por lo tanto,  $(\varphi_\omega, \psi_\omega) = (0, 0)$  en todo  $\Omega$ , lo que contradice (1.3.11). Consecuentemente, (1.1.11) es satisfecho

$$(\varphi_\omega, \psi_\omega)|_{\Omega_{0,1}} \geq (0, 0) \quad \text{y} \quad \int_{\Omega_{0,1}} (\varphi_\omega^2 + \psi_\omega^2) = 1.$$

y, necesariamente,

$$(\varphi_\omega, \psi_\omega) = (\varphi_{0,1}, \psi_{0,1}) \quad \text{en } \Omega_{0,1}.$$

donde  $(\varphi_{0,1}, \psi_{0,1}) \gg (0, 0)$  es la autofunción principal asociada con  $\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega_{0,1}]$ . Puesto que esa convergencia es obtenida para cualquier sucesión creciente  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ , la demostración del Teorema 1.1 es concluida.

## 1.4 Estimación inferior de $\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega]$ cuando $|\Omega| \downarrow 0$

A lo largo de esta sección, para un subdominio dado  $D$  de  $\Omega$ ,  $|D|$  será la medida de Lebesgue de  $D$ . El siguiente resultado nos garantiza que (1.1.6) es obtenida si  $|\Omega_{0,2}|$  y  $|\Omega_+^0|$  son suficientemente pequeñas; este resultado extiende el obtenido en [38, Th. 5.1].

**Teorema 1.6** *Denotamos por  $\mathcal{S}$  al operador matricial definido en (1.1.5), y  $\mathcal{S}_0 := \mathcal{S}(0, 0)$ . Entonces, para  $|\Omega|$  suficientemente pequeño,*

$$\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega] \geq \mu \Sigma |B_1|^{\frac{2}{N}} |\Omega|^{-\frac{2}{N}} - \alpha \sqrt{2\Sigma} |B_1|^{\frac{1}{N}} |\Omega|^{-\frac{1}{N}} - \beta, \quad (1.4.1)$$

donde  $B_1$  es la bola unitaria de  $\mathbb{R}^N$ ,

$$\Sigma := \sigma[-\Delta; B_1], \quad \mu := \min\{\mu_1, \mu_2\}/2, \quad \alpha := \max\{\|\mathbf{a}_1\|_\infty, \|\mathbf{a}_2\|_\infty\}/2,$$

y

$$\beta = \frac{1}{2} \left( \left| \min_{\Omega} \alpha_{[0,1]} \right| + \left| \min_{\Omega} \alpha_{[0,2]} \right| + \max_{\Omega} b + \max_{\Omega} c \right).$$

En particular,

$$\lim_{|\Omega| \rightarrow 0} \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega] = \infty.$$

**Demostración.** Denotemos por  $(\varphi_0, \psi_0)$  a la autofunción principal asociada con  $\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega]$ , normalizada, por lo que

$$\int_{\Omega} (\varphi_0^2 + \psi_0^2) = 1. \quad (1.4.2)$$

Entonces,

$$L_1 \varphi_0 = b \psi_0 + \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega] \varphi_0$$

y, por eso,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_0 L_1 \varphi_0 &= \int_{\Omega} b \psi_0 \varphi_0 + \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega] \int_{\Omega} \varphi_0^2 \\ &\leq \max_{\Omega} b \left( \int_{\Omega} \psi_0^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega} \varphi_0^2 \right)^{1/2} + \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega] \int_{\Omega} \varphi_0^2 \\ &\leq \max_{\Omega} b + \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega]. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega] &\geq \int_{\Omega} \varphi_0 L_1 \varphi_0 - \max_{\Omega} b \\ &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} \alpha_{[ij,1]} D_i \varphi_0 D_j \varphi_0 + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \mathbf{a}_{[i,1]} \varphi_0 D_i \varphi_0 + \int_{\Omega} \alpha_{[0,1]} \varphi_0^2 - \max_{\Omega} b \\ &\geq \mu_1 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 + \int_{\Omega} \varphi_0 \langle \mathbf{a}_1, \nabla \varphi_0 \rangle - \left| \min_{\Omega} \alpha_{[0,1]} \right| - \max_{\Omega} b, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{a}_1$  viene dado a través de (1.3.2). Además,

$$\left| \int_{\Omega} \varphi_0 \langle \mathbf{a}_1, \nabla \varphi_0 \rangle \right| \leq \|\mathbf{a}_1\|_{\infty} \int_{\Omega} \varphi_0 |\nabla \varphi_0| \leq \|\mathbf{a}_1\|_{\infty} \|\nabla \varphi_0\|_{L^2(\Omega)},$$

porque  $\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$ . De manera que,

$$\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega] \geq \mu_1 \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 - \|\mathbf{a}_1\|_{\infty} \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 \right)^{1/2} - \left| \min_{\Omega} \alpha_{[0,1]} \right| - \max_{\Omega} b.$$

Similarmente, a partir de

$$L_2 \psi_0 = c \varphi_0 + \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega] \psi_0$$

tendremos que

$$\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega] \geq \mu_2 \int_{\Omega} |\nabla \psi_0|^2 - \|\mathbf{a}_2\|_{\infty} \left( \int_{\Omega} |\nabla \psi_0|^2 \right)^{1/2} - \left| \min_{\Omega} \alpha_{[0,2]} \right| - \max_{\Omega} c.$$

Por consiguiente, sumando ambas igualdades, llegamos a

$$\sigma[\mathcal{S}_0; \Omega] \geq \mu \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \psi_0|^2 \right) - \alpha \left[ \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Omega} |\nabla \psi_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] - \beta.$$

Por otro lado, la siguiente estimación

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq x + y \leq \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

implica que

$$\left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Omega} |\nabla \psi_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \psi_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \sigma[\mathcal{S}_0; \Omega] &\geq \mu \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \psi_0|^2 \right) - \alpha \sqrt{2} \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \psi_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \beta \\ &= \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \psi_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \mu \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \psi_0|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \alpha \sqrt{2} \right] - \beta. \end{aligned}$$

De acuerdo con (1.4.2), por la caracterización variacional de  $\sigma[-\Delta; \Omega]$ , tenemos que

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 + \int_{\Omega} |\nabla \psi_0|^2 \geq \sigma[-\Delta; \Omega] \left( \int_{\Omega} \varphi_0^2 + \int_{\Omega} \psi_0^2 \right) = \sigma[-\Delta; \Omega].$$

Además, por la conocida desigualdad de Faber [26] y Krahm [36] (ver [38, pp. 280]), es bien sabido que

$$\sigma[-\Delta; \Omega] \geq \Sigma |B_1|^{\frac{2}{N}} |\Omega|^{-\frac{2}{N}}.$$

Por lo tanto, para  $|\Omega|$  suficientemente pequeño, (1.4.1) es obtenido.

Esto finaliza la demostración. ■

## 1.5 Un ejemplo de ecuaciones diferenciales ordinarias

El propósito de esta sección es mostrar el perfil límite de las soluciones probado en el Teorema 1.1 para el caso en que la condición (1.1.6) es reemplazada por una igualdad mediante un ejemplo de ecuaciones diferenciales ordinarias. Con el fin de lograr esto, supondremos el siguiente problema de valores de contorno sobre el intervalo abierto  $(-R, R) \subset \mathbb{R}$ ,

$$\begin{cases} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a(x)\right) \varphi_\lambda = \sigma(\lambda) \varphi_\lambda & \text{en } (-R, R), \\ \varphi_\lambda(R) = 0, \quad \varphi_\lambda(-R) = 0 \end{cases} \quad (1.5.1)$$

para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , donde se supone que  $\varphi_\lambda \in \mathcal{C}^2[(-R, R), \mathbb{R}]$  y  $a$  es una función simétrica y diferenciable a trozos la cual satisface las siguientes suposiciones:

1.  $a(x)$  es continua y estrictamente positiva para cada  $x$  perteneciente a los intervalos abiertos  $(-R + 2\varepsilon, -\varepsilon)$  y  $(\varepsilon, R - 2\varepsilon)$ .
2.  $a(x) = 0$  para cada  $x \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ , tal que

$$\mathcal{I}_1 := (-R, -R + 2\varepsilon) \cup (R - 2\varepsilon, R), \quad \mathcal{I}_2 := (-\varepsilon, \varepsilon),$$

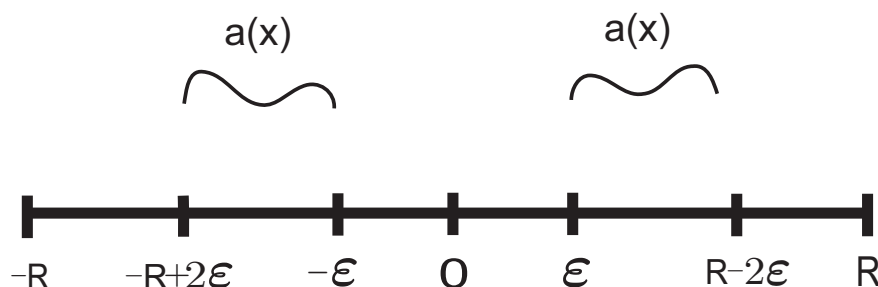


Figura 1.3: Perfil del peso  $a(x)$ .

La Figura 1.3 muestra un posible perfil de  $a(x)$ . Entonces, es sabido que

$$\sigma \left[ -\frac{d^2}{dx^2}; \mathcal{I}_1 \right] = \sigma \left[ -\frac{d^2}{dx^2}; \mathcal{I}_2 \right] = \left( \frac{\pi}{2\varepsilon} \right)^2, \quad (1.5.2)$$

También, supondremos las condiciones

$$\varphi_\lambda(0) = 1, \quad \varphi'_\lambda(0) = 0. \quad (1.5.3)$$

y a lo largo de esta sección denotaremos al autovalor principal del operador  $(-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a)$  en el intervalo  $(-R, R)$  mediante

$$\sigma(\lambda) := \sigma \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a; (-R, R) \right], \quad (1.5.4)$$

Además, dividiendo (1.5.1) por  $\|\varphi_\lambda\|_{L^2((-R, R))}$  tendremos la ecuación

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a(x) \right) \phi_\lambda = \sigma(\lambda) \phi_\lambda \quad (1.5.5)$$

tal que,

$$\phi_\lambda := \frac{\varphi_\lambda}{\|\varphi_\lambda\|_{L^2((-R, R))}}, \quad \text{y} \quad \|\phi_\lambda\|_{L^2((-R, R))} = 1. \quad (1.5.6)$$

A continuación, mostraremos una demostración auto-contenida de la analiticidad del autovalor principal  $\sigma(\lambda)$  (ver [2] para el Laplaciano). Nuestra demostración está basada en [40, Lemma 2.1], el cual es un resultado de perturbación que proviene de Crandall y Rabinowitz [16]. Para ello, fijamos  $\lambda \in \mathbb{R}$  y consideramos la familia de operadores

$$\mathfrak{L}(\mu) := -\frac{d^2}{dx^2} + \mu a - \sigma(\lambda) : \mathcal{C}^2([-R, R]) \rightarrow \mathcal{C}([-R, R]), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Como  $\mathfrak{L}(\mu)$  es un polinomio en  $\mu$ , será una familia analítica real en  $\mu \in \mathbb{R}$ . Además,

$$N[\mathfrak{L}(\lambda)] = \text{span}[\phi_\lambda] \quad \text{y} \quad \phi_\lambda \notin R[\mathfrak{L}(\lambda)].$$

De hecho, si  $\phi_\lambda \in R[\mathfrak{L}(\lambda)]$ , entonces existe  $u \in \mathcal{C}^2([-R, R])$  tal que

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a - \sigma(\lambda) \right] u = \phi_\lambda.$$

De esta manera, multiplicando esta identidad por  $\phi_\lambda$ , integrando en  $(-R, R)$ , y aplicando la fórmula de integración por partes tendremos

$$\int_{-R}^R \phi_\lambda^2 = \int_{-R}^R \phi_\lambda \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a - \sigma(\lambda) \right] u = \int_{-R}^R u \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a - \sigma(\lambda) \right] \phi_\lambda = 0,$$

lo cual contradice (1.5.6). Por lo tanto, gracias a [40, Lemma 2.1], existen  $\varepsilon > 0$  y una aplicación analítica

$$(a, \phi) : (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{C}^2([-R, R]),$$

tal que

$$(a(\lambda), \phi(\lambda)) = (0, \phi_\lambda) \quad (1.5.7)$$

y, para cada  $\mu \in (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ ,

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \mu a - \sigma(\lambda) \right] \phi(\mu) = a(\mu) \phi(\mu). \quad (1.5.8)$$

Como  $\phi(\mu) > 0$  para  $\mu \sim \lambda$ , porque  $\phi_\lambda$  es fuertemente positiva, obtendremos que gracias a la unicidad del autovalor principal

$$a(\mu) = \sigma\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \mu a - \sigma(\lambda); \Omega\right] = \sigma(\mu) - \sigma(\lambda). \quad (1.5.9)$$

Por consiguiente,  $\sigma(\mu)$  es también analítica real.

Como la aplicación  $\lambda \mapsto \sigma(\lambda)$  es creciente, para cualquier  $\lambda$

$$\sigma(\lambda) < \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2,$$

porque  $a = 0$  en  $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$  y por la Proposición 1.3(c). Además, de acuerdo con el Corolario 1.4 el siguiente límite está bien definido

$$\ell := \lim_{\lambda \uparrow \infty} \sigma(\lambda) \leq \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2.$$

En particular,

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \sigma'(\lambda) = 0$$

donde estamos denotando  $\sigma'(\lambda) = \frac{d\sigma}{d\lambda}(\lambda)$ . El siguiente resultado nos proporciona una versión más fina del comportamiento asintótico de  $\sigma(\lambda)$  cuando  $\lambda \uparrow \infty$  la cual será esencial a lo hora de probar el principal resultado de esta sección.

**Teorema 1.7** *El autovalor principal  $\sigma(\lambda)$  satisface*

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} [\lambda \sigma'(\lambda)] = 0. \quad (1.5.10)$$

*Dicho de otra manera,*

$$\sigma'(\lambda) = o(\lambda^{-1}) \quad \text{cuando } \lambda \uparrow \infty.$$

**Demostración.** Tomamos un  $\lambda \in \mathbb{R}$  y denotamos por  $\phi(\mu)$ ,  $\mu \sim \lambda$ , como la única aplicación que satisface (1.5.8). Entonces, por (1.5.8) y (1.5.9), tenemos que

$$-\frac{d^2}{dx^2}\phi(\mu) + \mu a \phi(\mu) = \sigma(\mu)\phi(\mu), \quad \mu \sim \lambda,$$

y, por tanto, derivando con respecto a  $\mu$  obtendremos que

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \mu a - \sigma(\mu)\right) \phi'(\mu) = (\sigma'(\mu) - a)\phi(\mu), \quad (1.5.11)$$

donde  $' = \frac{d}{d\mu}$ . De esta manera, multiplicando (1.5.11) por  $\phi(\mu)$  e integrando en  $(-R, R)$  tendremos

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R (\sigma'(\mu) - a)\phi^2(\mu) &= \int_{-R}^R \phi(\mu) \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \mu a - \sigma(\mu)\right) \phi'(\mu) \\ &= \int_{-R}^R \phi'(\mu) \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \mu a - \sigma(\mu)\right) \phi(\mu) = 0 \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\int_{-R}^R (\sigma'(\mu) - a) \phi^2(\mu) = 0, \quad \mu \sim \lambda.$$

En particular, por (1.5.6) y (1.5.7), llegamos a que

$$\sigma'(\lambda) = \frac{\int_{-R+2\varepsilon}^{-\varepsilon} a \phi_\lambda^2 + \int_{\varepsilon}^{R-2\varepsilon} a \phi_\lambda^2}{\int_{-R}^R \phi_\lambda^2} = \frac{\int_{-R}^R a \phi_\lambda^2}{\int_{-R}^R \phi_\lambda^2} = \int_{-R+2\varepsilon}^{-\varepsilon} a \phi_\lambda^2 + \int_{\varepsilon}^{R-2\varepsilon} a \phi_\lambda^2. \quad (1.5.12)$$

Señalar que, en general, no podemos garantizar que  $\int_{-R}^R \phi^2(\mu) = 1$ , a menos que  $\mu = \lambda$ .

Por otro lado, multiplicando

$$-\frac{d^2}{dx^2} \phi_\lambda + \lambda a \phi_\lambda = \sigma(\lambda) \phi_\lambda,$$

por  $\phi_\lambda$ , integrando en  $(-R, R)$  y aplicando la fórmula de integración por partes, obtenemos que

$$\int_{-R}^R (\phi'_\lambda)^2 + \int_{-R}^R \lambda a \phi_\lambda^2 = \sigma(\lambda) \int_{-R}^R \phi_\lambda^2 = \sigma(\lambda)$$

y, por consiguiente, (1.5.12) implica

$$\int_{-R}^R (\phi'_\lambda)^2 + \lambda \sigma'(\lambda) = \sigma(\lambda). \quad (1.5.13)$$

Como  $\sigma(\lambda)$  es acotado por arriba por  $(\frac{\pi}{2\varepsilon})^2$  y  $\sigma' \geq 0$ , a partir de (1.5.13) sabemos que existe una constante  $K > 0$  tal que

$$\int_{-R}^R (\phi'_\lambda)^2 \leq K, \quad \lambda \sigma'(\lambda) \leq K, \quad \text{para todo } \lambda > 0. \quad (1.5.14)$$

Ahora, afirmamos que

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} [\lambda \sigma'(\lambda)] = 0. \quad (1.5.15)$$

La demostración de (1.5.15) procederá por contradicción. Supongamos que (1.5.15) no es cierta. Entonces, existen  $\lambda_0 > 0$  y  $\alpha > 0$  tal que

$$\lambda \sigma'(\lambda) > \alpha > 0 \quad \text{si } \lambda > \lambda_0,$$

y, por eso, integrando en  $(\lambda_0, \lambda)$  llegamos a que

$$\sigma(\lambda) \geq \sigma(\lambda_0) + \alpha \log \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

y, por consiguiente,

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \sigma(\lambda) = \infty$$

lo que contradice el hecho de que  $\sigma(\lambda)$  sea acotado por arriba por  $(\frac{\pi}{2\varepsilon})^2$ , y concluye la demostración de (1.5.15).

Señalar que, de la identidad (1.5.13), obtenemos que la aplicación

$$\lambda \mapsto \int_{-R}^R (\phi'_\lambda)^2$$

es analítica real, y, por eso, derivando de nuevo con respecto a  $\lambda$ , llegamos a la identidad

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{-R}^R (\phi'_\lambda)^2 + \lambda \sigma''(\lambda) = 0. \quad (1.5.16)$$

De acuerdo con un célebre resultado de Tosio Kato [34]) sabemos que  $\sigma(\lambda)$  es cóncava, y, por tanto,  $\sigma''(\lambda) \leq 0$  para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ . De esta manera, a partir de (1.5.16) tendremos que, para cada  $\lambda \geq 0$ ,

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{-R}^R (\phi'_\lambda)^2 = -\lambda \sigma''(\lambda) \geq 0. \quad (1.5.17)$$

Por consiguiente, la aplicación

$$\lambda \mapsto \int_{-R}^R (\phi'_\lambda)^2, \quad \lambda \geq 0,$$

es no-decreciente y, debido a (1.5.14), acotada por arriba. Por lo tanto, el límite

$$d := \lim_{\lambda \uparrow \infty} \int_{-R}^R (\phi'_\lambda)^2$$

está bien definido. Por consiguiente, también obtendremos que desde (1.5.13) el siguiente límite está bien definido

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} [\lambda \sigma'(\lambda)] = \ell - d.$$

Necesariamente, debido a (1.5.17),

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} [\lambda \sigma'(\lambda)] = 0,$$

y, por tanto,

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \int_{-R}^R (\phi'_\lambda)^2 = \ell.$$

La demostración está finalizada. ■

Deberíamos puntualizar que si hubiéramos supuesto que

$$\sigma \left[ -\frac{d^2}{dx^2}; \mathcal{J}_1 \right] < \sigma \left[ -\frac{d^2}{dx^2}; \mathcal{J}_2 \right], \quad (1.5.18)$$



para dos intervalos abiertos y disjuntos tal que,

$$\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_2 := \{x \in [-R, R]; a(x) = 0\}$$

entonces, llevando a cabo el análisis desarrollado en la Sección 1.3, pero en este caso para una única ecuación, bajo la condición (1.5.18) obtendremos que

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \sigma \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a; \Omega \right] = \sigma \left[ -\frac{d^2}{dx^2}; \mathcal{J}_1 \right], \quad (1.5.19)$$

y que

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \|\phi_\lambda - \Phi_\omega\|_{H_0^1((-R, R))} = 0,$$

donde  $\Phi_\omega = 0$  en  $(-R, R) \setminus \bar{\mathcal{J}}_1$  y  $\phi_{0,1} := \Phi_\omega|_{\mathcal{J}_1} > 0$  será la única autofunción principal de

$$\sigma \left[ -\frac{d^2}{dx^2}; \mathcal{J}_1 \right],$$

tal que

$$\int_{\mathcal{J}_1} \phi_{0,1}^2 = 1.$$

La obtención de este resultado está basada en las herramientas técnicas desarrolladas en [2]. Puesto que [2] mejora lo obtenido por N. Dancer & J. López-Gómez [20], y la teoría de [20] ha sido utilizada por Harold Donnelly [23] para mejorar algunos resultados previos de Jean Bourgain [10], estos descubrimientos podrían jugar un papel muy importante en la teoría de variedades Riemannianas. Pero sin lugar a duda, tienen un papel muy importante en la Mecánica Cuántica, donde la constante auxiliar

$$h := \lambda^{-1/2}, \quad \lambda > 0,$$

representa la constante de Planck. En términos de  $h$ , tendremos que

$$\begin{cases} \left( -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + a(x) \right) \phi_\lambda = \sigma \left[ -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + a; (-R, R) \right] \phi_\lambda & \text{en } (-R, R), \\ \phi_\lambda(R) = 0, \quad \phi_\lambda(-R) = 0, \end{cases}$$

En análisis semi-clásico todos los efectos cuánticos son descartados haciendo que la constante de Planck  $h$  vaya a cero. Fue la intención de Barry Simon en [62, pp. 296] el estudiar el caso cuando  $a(x)$  se anula sobre una variedad, aunque únicamente observó que si algún cero de  $a(x)$  es degenerado, entonces

$$\sigma \left[ -h^2 \frac{d^2}{dx^2} + a; (-R, R) \right]$$

podría ir a cero más rápido que linealmente. Como una consecuencia de (1.5.19), el límite semi-clásico de la energía fundamental debe decaer cuadráticamente. De forma precisa,

$$\sigma[-h^2 \frac{d^2}{dx^2}; (-R, R)] = \sigma[-\frac{d^2}{dx^2}; \mathcal{J}_1]h^2 + o(h^4) \quad \text{as } h \downarrow 0.$$

Dicho de otro modo, si denotamos el límite semi-clásico de la energía fundamental por

$$E(h) := \sigma_1[-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + a(x); (-R, R)],$$

obtendremos que,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{E(h)}{h^2} = \min \left\{ \sigma_1[-\frac{d^2}{dx^2}; \mathcal{J}_i], i = 1, 2 \right\}$$

Además, los estados fundamentales

$$\psi_h := \varphi_{1/h^2}, \quad h \sim 0,$$

del operador de Schrödinger

$$-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + a$$

se concentran en  $\mathcal{J}_1$ , aproximando el estado de  $-\frac{d^2}{dx^2}$  en  $\mathcal{J}_1$ , cuando  $h \downarrow 0$ , en el espacio  $H_0^1((-R, R))$ , lo que mejora substancialmente [20, Teorema 5.1]. Aunque bastante natural, el hecho de que el estado límite se concentre en la componente de  $a^{-1}(0)$  para la cual  $-\frac{d^2}{dx^2}$  tiene el menor valor posible de energía es un resultado nuevo, en el sentido que no ha sido nunca observado, ni conjeturado, en la literatura. Sin embargo, el caso especial cubierto en esta sección a través de un ejemplo de ecuaciones diferenciales ordinarias continua siendo un problema abierto.

A continuación, suponiendo que

$$a_S := \max_{x \in (\varepsilon, R-2\varepsilon)} a(x). \quad (1.5.20)$$

tendremos el problema

$$\begin{cases} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a_S\right) \psi_\lambda = \sigma(\lambda) \psi_\lambda & \text{en } (\varepsilon, R-2\varepsilon), \\ \psi_\lambda(\varepsilon) = \varphi_\lambda(\varepsilon), \quad \psi_\lambda(R-2\varepsilon) = \varphi_\lambda(R-2\varepsilon). \end{cases} \quad (1.5.21)$$

Sabemos que la existencia de una solución positiva para el problema (1.5.21) está garantizada puesto que

$$\sigma \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a_S - \sigma(\lambda); (\varepsilon, R-2\varepsilon) \right] = \lambda a_S - \sigma(\lambda) + \left( \frac{\pi}{R-3\varepsilon} \right)^2 > 0,$$

para  $\lambda$  suficientemente grande, y por tanto, gracias al Corolario 1.4 el operador diferencial

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a_S - \sigma(\lambda)$$

es un isomorfismo. Además, restando (1.5.21) a (1.5.1) y reorganizando términos tendremos el siguiente problema en  $(\varepsilon, R - 2\varepsilon)$

$$\begin{cases} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a(x) - \sigma(\lambda)\right)(\varphi_\lambda - \psi_\lambda) = \lambda(a_S - a(x))\psi_\lambda & \text{en } (\varepsilon, R - 2\varepsilon), \\ \varphi_\lambda(\varepsilon) - \psi_\lambda(\varepsilon) = 0, \quad \varphi_\lambda(R - 2\varepsilon) - \psi_\lambda(R - 2\varepsilon) = 0 \end{cases} \quad (1.5.22)$$

De esta manera, puesto que sabemos que

$$\sigma\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a(x) - \sigma(\lambda); (-R, R)\right] = 0,$$

por la monotonía del autovalor principal con respecto al dominio, Proposición 1.3(c), tenemos que

$$\sigma\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a(x) - \sigma(\lambda); (\varepsilon, R - 2\varepsilon)\right] > 0,$$

luego, el operador

$$-\frac{d^2}{dx^2} + \lambda a(x) - \sigma(\lambda)$$

es un isomorfismo y (1.5.22) tiene alguna solución positiva. Además, debido al Teorema de Caracterización 1.2 obtenemos que

$$\varphi_\lambda \gg \psi_\lambda, \quad \text{en } (\varepsilon, R - 2\varepsilon).$$

De forma similar obtendremos que

$$\varphi_\lambda \gg \psi_\lambda, \quad \text{en } (\varepsilon, R - 2\varepsilon) \cup (-R + 2\varepsilon, -\varepsilon). \quad (1.5.23)$$

Además, gracias a (1.5.3), en  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , tenemos la siguiente solución positiva de (1.5.1)

$$\varphi_{1,\lambda}(x) = \cos[\sqrt{\sigma(\lambda)}x], \quad \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Entonces, después de una serie de cálculos el siguiente límite de la norma en  $L^2$  en  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  es obtenido

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_{1,\lambda}^2(x) dx \rightarrow \varepsilon \quad (1.5.24)$$

cuando  $\lambda$  va a infinito. Por consiguiente, debido a la simetría de (1.5.1), sin pérdida de generalidad podemos resolver (1.5.1) en  $(R - 2\varepsilon, R)$  y extender el resultado a  $(-R, -R + 2\varepsilon)$ . Por tanto, tendremos la siguiente solución positiva

$$\varphi_{2,\lambda}(x) = \frac{C_1}{\cos[\sqrt{\sigma(\lambda)}R]} \sin[\sqrt{\sigma(\lambda)}(x - R)], \quad \forall x \in (R - 2\varepsilon, R).$$

tal que  $C_1 > 0$ , debido al Corolario 1.4 y al hecho que  $x \in (R - 2\varepsilon, R)$ . Por otro lado, resolviendo (1.5.19)

$$\psi_{3,\lambda}(x) = C_2 \exp(\sqrt{\lambda a_S - \sigma(\lambda)}x) + C_3 \exp(-\sqrt{\lambda a_S - \sigma(\lambda)}x), \quad \forall x \in (\varepsilon, R - 2\varepsilon).$$

Además, ya que la siguiente condición debe ser cumplida

$$\varphi_{1,\lambda}(\varepsilon) = \psi_{3,\lambda}(\varepsilon), \quad \varphi'_{1,\lambda}(\varepsilon) = \psi'_{3,\lambda}(\varepsilon),$$

llegamos a que

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{2} \exp(-\sqrt{\lambda a_S - \sigma(\lambda)}\varepsilon) \left( \cos[\sqrt{\sigma(\lambda)}\varepsilon] - \sqrt{\frac{\sigma(\lambda)}{\lambda a_S - \sigma(\lambda)}} \sin[\sqrt{\sigma(\lambda)}\varepsilon] \right) \\ C_3 &= \frac{1}{2} \exp(\sqrt{\lambda a_S - \sigma(\lambda)}\varepsilon) \left( \cos[\sqrt{\sigma(\lambda)}\varepsilon] + \sqrt{\frac{\sigma(\lambda)}{\lambda a_S - \sigma(\lambda)}} \sin[\sqrt{\sigma(\lambda)}\varepsilon] \right) \end{aligned}$$

También, haciendo uso de la condición

$$\psi_{3,\lambda}(R - 2\varepsilon) = \varphi_{2,\lambda}(R - 2\varepsilon), \quad \psi'_{3,\lambda}(R - 2\varepsilon) = \varphi'_{2,\lambda}(R - 2\varepsilon),$$

tendremos que

$$C_1 = \frac{\cos[\sqrt{\sigma(\lambda)}R]}{\sin[-\sqrt{\sigma(\lambda)}2\varepsilon]} \left( C_2 \exp(\sqrt{\lambda a_S - \sigma(\lambda)}(R - 2\varepsilon)) + C_3 \exp(-\sqrt{\lambda a_S - \sigma(\lambda)}(R - 2\varepsilon)) \right)$$

Por lo tanto, es fácil comprobar que gracias a (1.5.23) llegaremos a que

$$\int_{-R+2\varepsilon}^{-\varepsilon} \psi_{\lambda}^2(x) dx \rightarrow \infty, \quad \text{y} \quad \int_{\varepsilon}^{R-2\varepsilon} \psi_{\lambda}^2(x) dx \rightarrow \infty \quad \text{cuando} \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (1.5.25)$$

por lo que,

$$\int_{-R}^R \psi_{\lambda}^2(x) dx \rightarrow \infty, \quad \text{cuando} \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

A continuación, calcularemos los autovalores del problema

$$\begin{cases} -\phi_{\lambda}'' = \tau \phi_{\lambda} & \text{en } (-R, R), \\ \phi_{\lambda}(R) = 0, & \phi_{\lambda}(-R) = 0 \end{cases}$$

obteniendo la siguiente expresión

$$\tau_n = \left( \frac{n\pi}{2R} \right)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De forma que, el autovalor más pequeño, o autovalor principal sea

$$\tau_1 = \left( \frac{\pi}{2R} \right)^2,$$

cuando  $n = 1$ , tal que su autofunción principal asociada tenga la expresión

$$\phi_{\tau_1} = \cos \left[ \frac{\pi}{2R} x \right] \geq 0,$$

para cada  $x \in [-R, R]$ . Además, debido a la propiedad variacional del autovalor principal sabemos que

$$\left( \frac{\pi}{2R} \right)^2 = \inf_{x \in [-R, R]} \frac{\int_{-R}^R (\phi'_\lambda)^2}{\int_{-R}^R \phi_\lambda^2}, \quad (1.5.26)$$

para cada  $\phi \neq 0$ . Por lo tanto,

$$\int_{-R}^R (\phi'_\lambda)^2 \geq \left( \frac{\pi}{2R} \right)^2 \int_{-R}^R \phi_\lambda^2.$$

y además, gracias a la simetría de (1.5.1) tenemos que

$$\int_0^R (\phi'_\lambda)^2 \geq \left( \frac{\pi}{2R} \right)^2 \int_0^R \phi_\lambda^2.$$

Entonces, multiplicando (1.5.1) por  $\phi_\lambda$ , integrando en  $(0, R)$  y aplicando la fórmula de integración por partes obtendremos

$$\left( \frac{\pi}{2R} \right)^2 \int_0^R \phi_\lambda^2 + \lambda \int_\varepsilon^{R-2\varepsilon} a(x) \phi_\lambda^2 = \sigma(\lambda) \int_0^R \phi_\lambda^2. \quad (1.5.27)$$

Por eso, poniendo

$$a_L := \min_{x \in (\varepsilon, R-2\varepsilon)} a(x),$$

y reorganizando términos llegamos a que

$$\lambda a_L - \sigma(\lambda) + \left( \frac{\pi}{2R} \right)^2 \leq \left( \sigma(\lambda) - \left( \frac{\pi}{2R} \right)^2 \right) \frac{\int_0^\varepsilon \phi_\lambda^2 + \int_{R-2\varepsilon}^R \phi_\lambda^2}{\int_\varepsilon^{R-2\varepsilon} \phi_\lambda^2} \quad (1.5.28)$$

Por consiguiente, debido a (1.5.25) y (1.5.28) podemos concluir que la norma de la solución positiva de (1.5.1), que llamaremos  $\phi_\lambda$ , va a infinito cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ . De hecho, podemos asegurar que va más rápido en  $(-R, -R+2\varepsilon) \cup (R-2\varepsilon, R) \cup (\varepsilon, R-2\varepsilon)$  que en  $(-R+2\varepsilon, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, R-2\varepsilon)$ , así como que es acotada en  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Por lo tanto, gracias al Teorema 1.7 y a (1.5.24) podemos concluir que la solución límite de (1.5.5) se concentra en el subdominio exterior mientras que se aproxima a cero en el resto del intervalo  $(-R, R)$  cuando  $\lambda$  va a infinito.

## Capítulo 2

### De soluciones clásicas a Metasoluciones

En este capítulo analizaremos la interacción existente entre las leyes de Dinámica de Poblaciones más clásicas, Malthus versus Verhulst, para una clase de sistemas parabólicos sublineales de tipo cooperativo, donde, al igual que para el caso de una ecuación, las *metasoluciones* juegan un papel imprescindible en la descripción de la dinámica del problema en los regímenes donde el modelo no admite un estado de equilibrio no-negativo.

#### 2.1 Introducción

Este capítulo caracteriza la dinámica del modelo parabólico

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda\alpha(x)u + \beta(x)v - a(x)f(x, u)u & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \delta(x)u + \lambda\gamma(x)v - b(x)g(x, v)v & \\ (u, v) = (0, 0) & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ (u(\cdot, 0), v(\cdot, 0)) = (u_0, v_0) > (0, 0) & \text{en } \Omega, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , con frontera suave  $\partial\Omega$ , e.g., de clase  $C^3$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , y  $h \in C^\mu(\bar{\Omega})$ ,  $h > 0$ , para todo  $h \in \{a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta\}$  y algún  $\mu \in (0, 1]$ . Además, dados  $V_1, V_2 \in C(\bar{\Omega})$ ,  $\mathcal{A}(V_1, V_2)$  será el operador de la forma

$$\mathcal{A}(V_1, V_2) := \begin{pmatrix} -\Delta + V_1 & -\beta \\ -\delta & -\Delta + V_2 \end{pmatrix}. \quad (2.1.2)$$

Como  $\beta > 0$  y  $\delta > 0$ ,  $\mathcal{A}(V_1, V_2)$  es considerado *cooperativo* (como fue discutido en [48] y [7]), en el mismo sentido que (1.1.4).

A lo largo de este capítulo, impondremos las siguientes suposiciones:

(B1)  $\alpha(x) > 0$ ,  $\beta(x) > 0$ ,  $\delta(x) > 0$ , y  $\gamma(x) > 0$ , para todo  $x \in \bar{\Omega}$  y

$$\Omega_+ := \{x \in \Omega : a(x) > 0\} = \{x \in \Omega : b(x) > 0\}$$

es un subdominio de  $\Omega$  con

$$\bar{\Omega}_+ \subset \Omega,$$

cuya frontera,  $\partial\Omega_+$ , es de clase  $\mathcal{C}^3$ , y de forma que

$$\Omega_0 := \Omega \setminus \bar{\Omega}_+$$

esté formado por dos componentes,

$$\Omega_{0,i}, \quad i \in \{1, 2\}, \quad \text{tal que} \quad \bar{\Omega}_{0,2} \subset \Omega \quad \text{y} \quad \bar{\Omega}_{0,1} \cap \bar{\Omega}_{0,2} = \emptyset.$$

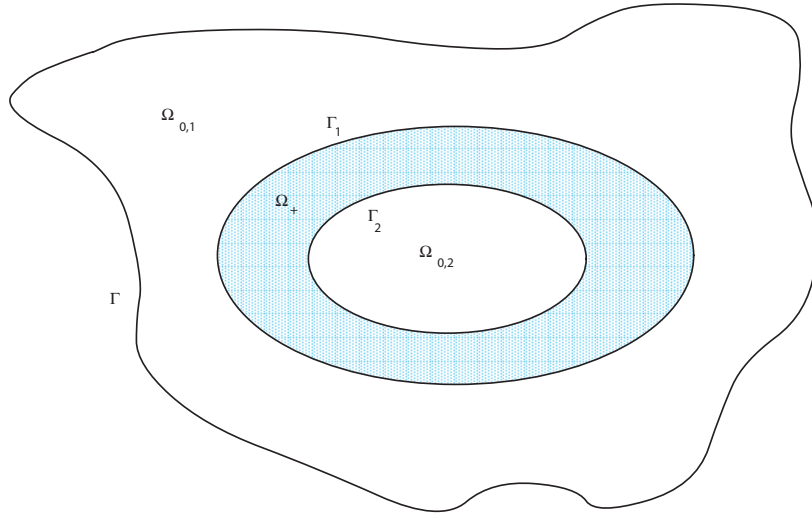


Figura 2.1: Configuración nodal de  $a(x)$  y  $b(x)$ .

La Figura 2.1 muestra una situación típica para la cual la suposición (B1) es satisfecha. Hemos denotado

$$\Gamma = \partial\Omega, \quad \Gamma_1 = \partial\Omega_{0,1} \setminus \partial\Omega, \quad \Gamma_2 := \partial\Omega_{0,2}, \quad \partial\Omega_+ = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

En lo sucesivo, dado un subdominio suave  $D \subset \Omega$ , denotaremos por

$$\Sigma[\lambda, D] := \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma), D], \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.1.3)$$

al autovalor principal de  $\mathcal{A}(V_1, V_2)$  en  $D$  (bajo condiciones de frontera Dirichlet homogéneas). Además, la autofunción principal asociada con (2.1.3) es única salvo constantes multiplicativas y denotada por

$$\varphi \gg 0, \quad \text{y} \quad \psi \gg 0.$$

De igual forma a como fue discutido en el Capítulo 1 el autovalor principal es simple y dominante en el mismo sentido que (1.1.8). Además, la aplicación

$$\lambda \mapsto \Sigma[\lambda, D]$$

es analítica, decreciente, y satisface

$$\lim_{\lambda \downarrow -\infty} \Sigma[\lambda, D] = \infty, \quad \lim_{\lambda \uparrow \infty} \Sigma[\lambda, D] = -\infty.$$

(cf. [48] y [7]). Por consiguiente, existe un único valor de  $\lambda$ , que denotaremos por  $\lambda^*(D)$ , tal que

$$\Sigma[\lambda^*(D), D] = 0.$$

En este capítulo, suponemos que  $\Omega_{0,1}$  y  $\Omega_{0,2}$  satisfacen

$$(B2) \quad \lambda^*(\Omega_{0,1}) < \lambda^*(\Omega_{0,2}).$$

Por el resultado obtenido en la Sección 1.4 del primer capítulo de esta Memoria, (B2) es obtenido tomando  $\Omega_{0,2}$  suficientemente pequeño. Finalmente, imponemos las siguientes suposiciones de estructura a  $f(x, u)$  y  $g(x, v)$ :

$$(B3) \quad f, g \in \mathcal{C}^{\mu, 1+\mu}(\bar{\Omega} \times [0, \infty)), \text{ y, para cualquier } h \in \{f, g\},$$

$$h(x, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \partial_u h(x, u) > 0$$

para todo  $x \in \bar{\Omega}$  y  $u > 0$ .

$$(B4) \quad \text{Existe } F \in \mathcal{C}^{1+\mu}([0, \infty)) \text{ tal que}$$

$$F(0) = 0, \quad F(u) > 0 \quad \text{y} \quad F'(u) > 0$$

para todo  $u > 0$ ,

$$\lim_{u \uparrow \infty} F(u) = \infty, \quad \text{y} \quad \min\{f(\cdot, w), g(\cdot, w)\} \geq F(w)$$

para todo  $w \geq 0$ .

Señalar que (B3) y (B4) implican que

$$\lim_{u \uparrow \infty} f(x, u) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{v \uparrow \infty} g(x, v) = \infty \quad \text{uniformemente en } x \in \bar{\Omega}. \quad (2.1.4)$$

Supongamos (B3-4) y, para cualquier par de constantes  $A > 0$ ,  $\Lambda > 0$ , y cualquier subconjunto compacto  $K \subset \Omega_+$ , consideramos la función auxiliar

$$G_{[K, A, \Lambda]}(s) := AF(s)s - \Lambda s, \quad s \geq 0.$$

Por (B4), para cualquier  $A, \Lambda$  y  $K$ ,  $G_{[K, A, \Lambda]}$  tiene un único cero positivo al que denotamos como  $z_{[K, A, \Lambda]}$ . La siguiente suposición garantiza estimaciones uniformes a priori en  $\Omega_+$  para todas las soluciones de (2.1.1):



(B5) Para cualquier  $A, \Lambda, K$  y  $s > z_{[K, A, \Lambda]}$ ,

$$I(s) := \int_s^\infty \left[ \int_s^t G_{[K, A, \Lambda]}(z) dz \right]^{-\frac{1}{2}} dt < \infty, \quad \lim_{s \uparrow \infty} I(s) = 0.$$

Esta condición refina la clásica obtenida por Keller [35] y Osserman [56] (cf. [39], [46]).

Adoptando el lenguaje de Dinámica de Poblaciones, (2.1.1) es un modelo a través del cual se simula la evolución de dos especies cooperativas  $u(x, t)$  y  $v(x, t)$  distribuídas de forma aleatoria en  $\Omega$ . Para este modelo concreto  $\lambda\alpha(x)$  y  $\lambda\gamma(x)$  representan los rangos de natalidad intrínsecos de  $u$  y  $v$ , y  $\beta(x)$ ,  $\delta(x)$  miden los efectos cooperativos mutuos. Además, los coeficientes  $a(x)$  y  $b(x)$  suponen los efectos de aglomeración de las poblaciones en  $\Omega_+$ , de manera que tales poblaciones van a exhibir un crecimiento Malthusiano en  $\Omega_0$ , donde los efectos de aglomeración son nulos. En (2.1.1),  $\Omega$  está totalmente rodeada por regiones hostiles, puesto que estamos imponiendo condiciones de frontera Dirichlet homogéneas en  $\partial\Omega$ . Finalmente, las funciones

$$u_0, v_0 \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), \quad (u_0, v_0) > (0, 0),$$

representan las distribuciones iniciales de las poblaciones. Por consiguiente, (2.1.1) puede ser considerado como un modelo cooperativo intermedio que conecta las leyes de Malthus y la de Verhulst de Dinámica de Poblaciones; siendo la principal meta de este capítulo el averiguar la interacción entre ellas de forma precisa bajo las suposiciones (B1-4).

En caso límite cuando  $\Omega_+ = \emptyset$ , (2.1.1) se convierte en un problema lineal cooperativo, y la única solución de (2.1.1) viene dada mediante

$$\begin{pmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix} = e^{-A(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma)t} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que, en tal caso, tendremos que, para cada  $x \in \Omega$ ,

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u(x, t), v(x, t)) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } \lambda < \lambda^*(\Omega), \\ (\infty, \infty) & \text{si } \lambda > \lambda^*(\Omega), \end{cases}$$

ya que

$$\begin{cases} \Sigma[\lambda, \Omega] > 0 & \text{si } \lambda < \lambda^*(\Omega), \\ \Sigma[\lambda, \Omega] < 0 & \text{si } \lambda > \lambda^*(\Omega), \end{cases}$$

y  $(u_0, v_0) > (0, 0)$ .

Cuando  $\Omega_+ = \Omega$ , i.e.,  $a(x) > 0$  y  $b(x) > 0$  para todo  $x \in \Omega$ , de acuerdo con Molina-Meyer [54], [53], la dinámica de (2.1.1) está gobernada por su estado de equilibrio maximal no-negativo, i.e., por la solución maximal no-negativa de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\alpha u + \beta v - af(\cdot, u)u \\ -\Delta v = \delta u + \lambda\gamma v - bg(\cdot, v)v \\ (u, v) = (0, 0) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{en } \Omega, \\ \\ \text{en } \partial\Omega. \end{matrix} \quad (2.1.5)$$

Entonces, resulta que (2.1.5) posee una solución  $(u_\lambda, v_\lambda)$ , con  $u_\lambda \gg 0$  y  $v_\lambda \gg 0$  (conocida como *estado de coexistencia*) sí, y sólo si  $\lambda > \lambda^*(\Omega)$  y, de acuerdo con Molina-Meyer [54], [53],

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u(x, t), v(x, t)) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } \lambda \leq \lambda^*(\Omega), \\ (u_\lambda, v_\lambda) & \text{si } \lambda > \lambda^*(\Omega), \end{cases}$$

mientras que, en un entorno más general como el supuesto en este capítulo, (2.1.5) no puede admitir un estado de coexistencia si  $\lambda \geq \lambda^*(\Omega_{0,1})$  (cf. Molina-Meyer [55]). El principal objetivo de este capítulo consiste en la descripción de la dinámica de (2.1.1) bajo esas circunstancias. Entre los principales resultados, estará el mostrar que, en el caso en que  $\lambda \geq \lambda^*(\Omega_{0,1})$ , la dinámica de (2.1.1) está regulada por sus *metasoluciones*, así como ocurre para la ecuación logística (cf. [46]). Las metasoluciones de (2.1.1) son extensiones por infinito de las *soluciones explosivas*, o *grandes*, del sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - a f(\cdot, u)u, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - b g(\cdot, v)v, \end{cases} \quad (2.1.6)$$

en  $D \in \{\Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}, \Omega_+\}$ . El principal resultado de este capítulo puede ser resumido de la siguiente manera:

- Si  $\lambda \leq \lambda^*(\Omega)$ , entonces  $\lim_{t \uparrow \infty} (u(x, t), v(x, t)) = (0, 0)$ .
- Si  $\lambda^*(\Omega) < \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,1})$ , entonces  $\lim_{t \uparrow \infty} (u(x, t), v(x, t)) = (u_\lambda, v_\lambda)$ , donde  $(u_\lambda, v_\lambda)$  es el único estado de coexistencia de (2.1.5).
- Si  $\lambda^*(\Omega_{0,1}) \leq \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ , entonces, para cada  $x \in \bar{\Omega}_{0,1} \setminus \partial\Omega$ ,

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u(x, t), v(x, t)) = (\infty, \infty), \quad (2.1.7)$$

mientras, en  $\Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}$ ,

$$L_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\min} \leq \liminf_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \leq \limsup_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \leq L_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\max},$$

donde, para un  $D \subset \Omega$  dado,  $L_{[\lambda, D]}^{\min}$  (resp.  $L_{[\lambda, D]}^{\max}$ ) representa la solución minimal (resp. maximal) del problema singular

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - a f(\cdot, u)u \\ -\Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - b g(\cdot, v)v \\ (u, v) = (\infty, \infty) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{en } D, \\ \\ \text{en } \partial D. \end{matrix} \quad (2.1.8)$$

- Cuando  $\lambda \geq \lambda^*(\Omega_{0,2})$ ,  $u$  y  $v$  crecen de acuerdo a la Ley de Verhulst en  $\Omega_+$ , mientras que exhiben un crecimiento Malthusiano en  $\Omega \setminus \bar{\Omega}_+$ , i.e., (2.1.7) ocurre para todo  $x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_+$ , mientras que

$$L_{[\lambda, \Omega_+]}^{\min} \leq \liminf_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \leq \limsup_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \leq L_{[\lambda, \Omega_+]}^{\max} \quad \text{en } \Omega_+.$$

Estos resultados mejoran sustancialmente una serie de resultados previos obtenidos para sistemas (cf. Molina-Meyer [54], [53], [55]), así como para 'ecuaciones lógicas degeneradas' (cf. Brezis & Oswald [11], Ouyang [58], Fraile et al. [28], García-Melián et al. [29], Gómez-Reñasco & López-Gómez [32], López-Gómez [40], [46], [43], y Du & Huang [25]).

Los perfiles asintóticos de las soluciones de (2.1.1) caracterizan las dinámicas de una clase más amplia de problemas superlineales indefinidos, donde  $a(x)$  y  $b(x)$  pueden cambiar de signo, pero estos sistemas están fuera del entorno general considerado aquí (cf. López-Gómez [44], López-Gómez & Quittner [52], y López-Gómez & Molina-Meyer [50] para algunos resultados relativos a problemas superlineales indefinidos), así como en el caso de condiciones de frontera dinámicas (cf. C. Bandle, J. von Below, and W. Reichel [9]).

Los resultados de este capítulo son independientes de otros obtenidos para 'sistemas degenerados' de tipo Lotka-Volterra (cf. López-Gómez [41], Du [24], y López-Gómez & Molina-Meyer [48]).

Este capítulo está distribuido de la forma siguiente. La Sección 2.2 presenta los principales resultados obtenidos en el capítulo. La Sección 2.3 estudia algunas propiedades abstractas de los sistemas cooperativos que serán necesarias para probar los principales resultados expuestos en la Sección 2.2. La Sección 2.4 muestra la existencia de cotas a priori en  $\Omega_+$ . Finalmente, las Secciones 2.5 y 2.6 consisten en las demostraciones de los principales resultados de este capítulo. A lo largo de este capítulo, las suposiciones (B1-2) serán siempre impuestas.

## 2.2 Principales resultados

Bajo las condiciones generales supuestas en este capítulo, cualquier solución débil  $(u, v)$  de (2.1.6) en un subdominio suave  $D \subset \Omega$  cumple que  $u, v \in C^{2+\mu}(D)$ , y las soluciones de (2.1.1) satisfacen

$$u, v \in C^{2+\mu, 1+\frac{\mu}{2}}(\bar{\Omega} \times (0, \infty))$$

A lo largo de este capítulo, dado un subdominio suave  $D \subset \Omega$  y  $M, N \in [0, \infty]$ , consideraremos la familia de problemas de frontera elípticos

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - a(x)f(x, u)u & \text{en } D, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - b(x)g(x, v)v & \\ (u, v) = (M, N) & \text{en } \partial D. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Además, cualquier solución débil  $(u, v)$  de (2.2.1) satisface que  $u, v \in \mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D})$  si  $M, N \in [0, \infty)$ , mientras, en el caso en que  $M = N = \infty$ ,  $(u, v) \in \mathcal{C}^{2+\mu}(D) \times \mathcal{C}^{2+\mu}(D)$  se dice que es una solución de (2.2.1) si resuelve el sistema en  $D$  y

$$\lim_{\substack{x \in D \\ \text{dist}(x, \partial D) \downarrow 0}} (u(x), v(x)) = (\infty, \infty). \quad (2.2.2)$$

Estas soluciones son conocidas como *soluciones grandes* de (2.1.6) en  $D$ .

El siguiente resultado caracteriza la existencia de soluciones grandes de (2.1.6) en  $\Omega_+$ . Resulta que esas soluciones van a ser los perfiles asintóticos cuando  $t \uparrow \infty$  de las soluciones de (2.1.1) siempre que  $\lambda \geq \lambda^*(\Omega_{0,2})$ .

**Teorema 2.1** *Supongamos  $M = N = \infty$  y  $D = \Omega_+$ . Entonces, (2.2.1) posee una solución positiva minimal y una maximal en cada componente para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , que denotaremos por*

$$L_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_+]}^{\min} \quad \text{y} \quad L_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_+]}^{\max},$$

*respectivamente; en el sentido siguiente*

$$L_{[\lambda, \Omega_+]}^{\min} \leq L \leq L_{[\lambda, \Omega_+]}^{\max}$$

*si  $L > (0, 0)$  resuelve (2.2.1).*

El siguiente resultado caracteriza la existencia de soluciones grandes de (2.1.6) en  $\Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}$ . Esas soluciones nos proporcionan la dinámica de (2.1.1) cuando  $\lambda^*(\Omega_{0,1}) \leq \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ .

**Teorema 2.2** *Supongamos  $M = N = \infty$  y*

$$D = \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1} = \Omega_+ \cup \bar{\Omega}_{0,2}.$$

*Entonces, (2.2.1) posee una solución positiva sí, y sólo si*

$$\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2}).$$

*Además, in tal caso, (2.2.1) tiene una solución minimal y una maximal, que denotaremos por*

$$L_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\min} \quad \text{y} \quad L_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\max},$$

*en el sentido que*

$$L_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\min} \leq L \leq L_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\max}$$

*si  $L$  resuelve (2.2.1). Por otra parte, existe una solución de (2.1.8) en  $\Omega_+$ , denotada por*

$$L_{[\lambda^*(\Omega_{0,2}), \Omega_+]},$$

*tal que*

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,2})} L_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\min} = \begin{cases} (\infty, \infty) & \text{en } \bar{\Omega}_{0,2}, \\ L_{[\lambda^*(\Omega_{0,2}), \Omega_+]} & \text{en } \Omega_+. \end{cases}$$

La siguiente versión refinada del resultado de existencia establecido por Molina-Meyer [55] caracteriza la existencia de los estados de coexistencia de (2.1.5) ((2.2.1) con  $M = N = 0$  y  $D = \Omega$ ). Estas soluciones nos proporcionan la dinámica de (2.1.1) dentro del rango  $\lambda^*(\Omega) < \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,1})$ .

**Teorema 2.3** *El problema (2.1.5) tiene un estado de coexistencia sí, y sólo si*

$$\lambda^*(\Omega) < \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,1}).$$

*Además, es único si existe, y si lo denotamos por  $\theta_{[\lambda, \Omega]}$ . Entonces*

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda^*(\Omega)} \theta_{[\lambda, \Omega]} = (0, 0) \quad \text{en} \quad \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega}),$$

*la aplicación*

$$\begin{aligned} (\lambda^*(\Omega), \lambda^*(\Omega_{0,1})) & \xrightarrow{\theta} \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \\ \lambda & \mapsto \theta(\lambda) := \theta_{[\lambda, \Omega]} \end{aligned}$$

*es fuertemente creciente y de clase  $\mathcal{C}^1$ , y*

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})} \theta_{[\lambda, \Omega]} = \begin{cases} (\infty, \infty) & \text{en } \bar{\Omega}_{0,1} \setminus \partial\Omega, \\ L_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}), \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\min} & \text{en } \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}. \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Utilizando las notaciones introducidas en los Teoremas 2.1, 2.2 y 2.3 podemos establecer el principal teorema de este capítulo, con el que obtendremos la dinámica de (2.1.1) para todos los valores de  $\lambda$ .

**Teorema 2.4** *Denotamos por  $(u(x, t), v(x, t))$  a la solución de (2.1.1). Entonces,*

- (a)  $\lim_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) = (0, 0)$  en  $\mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  para todo  $\lambda \leq \lambda^*(\Omega)$ .
- (b)  $\lim_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) = \theta_{[\lambda, \Omega]}$  en  $\mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  si  $\lambda^*(\Omega) < \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,1})$ .
- (c) Supongamos que  $\lambda^*(\Omega_{0,1}) \leq \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ . Entonces,

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) = (\infty, \infty),$$

*uniformemente en subconjuntos compactos de  $\bar{\Omega}_{0,1} \setminus \partial\Omega$ , mientras*

$$L_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\min} \leq \liminf_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \leq \limsup_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \leq L_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\max}$$

*en  $\Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}$ . En realidad,*

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) = L_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\min} \quad \text{en } \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}$$

*si, además,  $(u_0, v_0)$  es una subsolución de (2.1.5).*

(d) Supongamos  $\lambda \geq \lambda^*(\Omega_{0,2})$ . Entonces,

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) = (\infty, \infty),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\Omega \setminus \Omega_+$ , mientras, en  $\Omega_+$ ,

$$L_{[\lambda, \Omega_+]}^{\min} \leq \liminf_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \leq \limsup_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \leq L_{[\lambda, \Omega_+]}^{\max}.$$

Además,

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) = L_{[\lambda, \Omega_+]}^{\min} \quad \text{en } \Omega_+$$

si  $(u_0, v_0)$  es una subsolución de (2.1.5).

Lo establecido en el Teorema 2.4(c),(d) puede ser sustancialmente reducido introduciendo el siguiente concepto.

**Definición 2.5** Supongamos  $D \in \{\Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}, \Omega_+\}$ . La función

$$\mathfrak{M} : \Omega \rightarrow [0, \infty]^2$$

se dice que es una metasolución de (2.1.6) con soporte en  $D$  si existe una solución grande  $L$  de (2.1.6) en  $D$  para la cual

$$\mathfrak{M} = \begin{cases} (\infty, \infty) & \text{en } \Omega \setminus D, \\ L & \text{en } D. \end{cases}$$

$\mathfrak{M}$  se denomina metasolución minimal (resp. maximal) (2.1.6) en  $D$  cuando  $L$  es la solución grande minimal (resp. maximal) en  $D$ . Las metasoluciones minimal y maximal de (2.1.6) en  $D$  serán denotadas por

$$\mathfrak{M}_{[\lambda, D]}^{\min} \quad \text{y} \quad \mathfrak{M}_{[\lambda, D]}^{\max}.$$

De acuerdo con la Definición 2.5, Teorema 2.4(c) nos dice que, en el caso en que  $\lambda^*(\Omega_{0,1}) \leq \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ ,

$$\mathfrak{M}_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\min} \leq \liminf_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \leq \limsup_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \leq \mathfrak{M}_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\max}$$

en  $\Omega$ , y que en realidad

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) = \mathfrak{M}_{[\lambda, \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\min} \quad \text{en } \Omega$$

si  $(u_0, v_0)$  es una subsolución de (2.1.5). Similarmente, por el Teorema 2.4(d), para cualquier  $\lambda \geq \lambda^*(\Omega_{0,2})$ ,

$$\mathfrak{M}_{[\lambda, \Omega_+]}^{\min} \leq \liminf_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \leq \limsup_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) \leq \mathfrak{M}_{[\lambda, \Omega_+]}^{\max} \quad \text{en } \Omega,$$

y

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u(\cdot, t), v(\cdot, t)) = \mathfrak{M}_{[\lambda, \Omega_+]}^{\min} \quad \text{en } \Omega$$

si  $(u_0, v_0)$  es una subsolución de (2.1.5).

Por lo tanto, la dinámica de (2.1.1) está gobernada por la solución maximal clásica no-negativa de (2.1.5) si  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,1})$ , por las metasoluciones de (2.1.6) con soporte en  $\Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}$  si  $\lambda^*(\Omega_{0,1}) \leq \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ , y por las metasoluciones de (2.1.6) con soporte en  $\Omega_+$  si  $\lambda \geq \lambda^*(\Omega_{0,2})$ . La Figura 2.2 muestra todos los posibles perfiles asintóticos de las soluciones de (2.1.1) en función de los posibles valores del parámetro  $\lambda$ . A menos que  $L_{[\lambda, D]}^{\min} = L_{[\lambda, D]}^{\max}$ , el Teorema 2.4 no caracteriza completamente el comportamiento asintótico de las soluciones de (2.1.1). Algunas condiciones suficientes bastante generales para la unicidad de la solución grande para una ecuación, no para el sistema, se encuentran en Cirstea & Radulescu [12], [13], [14] y López-Gómez [42], [45], [47]. Esos resultados pueden ser extendidos para cubrir el problema considerado en este capítulo, sin embargo los detalles técnicos aparecerán en algún otro lugar.

## 2.3 Resultados abstractos auxiliares

Esta sección recopila algunos resultados pivotaes que tendrán un papel muy importante en las demostraciones de los principales Teoremas de este capítulo, así como algunos resultados obtenidos en el Capítulo 3. A lo largo de esta sección supondremos que

$$f, g \in C^{\nu, \nu}(\bar{\Omega} \times [0, \infty)) \text{ y } D \subset \Omega \text{ es un subdominio suave con } D \cap \Omega_+ \neq \emptyset. \quad (2.3.1)$$

La Sección 1.2 de esta Memoria jugarán un papel primordial en la obtención de los resultados contenidos en esta sección. Adaptando la Teoría abstracta de H. Amann [5], [6], el siguiente resultado, basado en el Teorema 1.2, y atribuible a Molina-Meyer [54], [53], puede ser obtenido.

**Teorema 2.6** *Supongamos  $h_1, h_2 \in C^{2+\mu}(\partial D)$  y además el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - a f(\cdot, u)u & \text{en } D, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - b g(\cdot, v)v & \text{en } D, \\ (u, v) = (h_1, h_2) & \text{en } \partial D, \end{cases} \quad (2.3.2)$$

*tiene una subsolución  $(\underline{u}, \underline{v})$ ,  $\underline{u}, \underline{v} \in C^{2+\mu}(\bar{D})$ , y una supersolución  $(\bar{u}, \bar{v})$ ,  $\bar{u}, \bar{v} \in C^{2+\mu}(\bar{D})$ , tal que*

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\bar{u}, \bar{v}).$$

*Entonces, (2.3.2) posee una solución  $(u, v)$ ,  $u, v \in C^{2+\mu}(\bar{D})$ , tal que*

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (u, v) \leq (\bar{u}, \bar{v}).$$

*En realidad, (2.3.2) posee una solución minimal y una maximal en el intervalo  $[(\underline{u}, \underline{v}), (\bar{u}, \bar{v})]$ .*

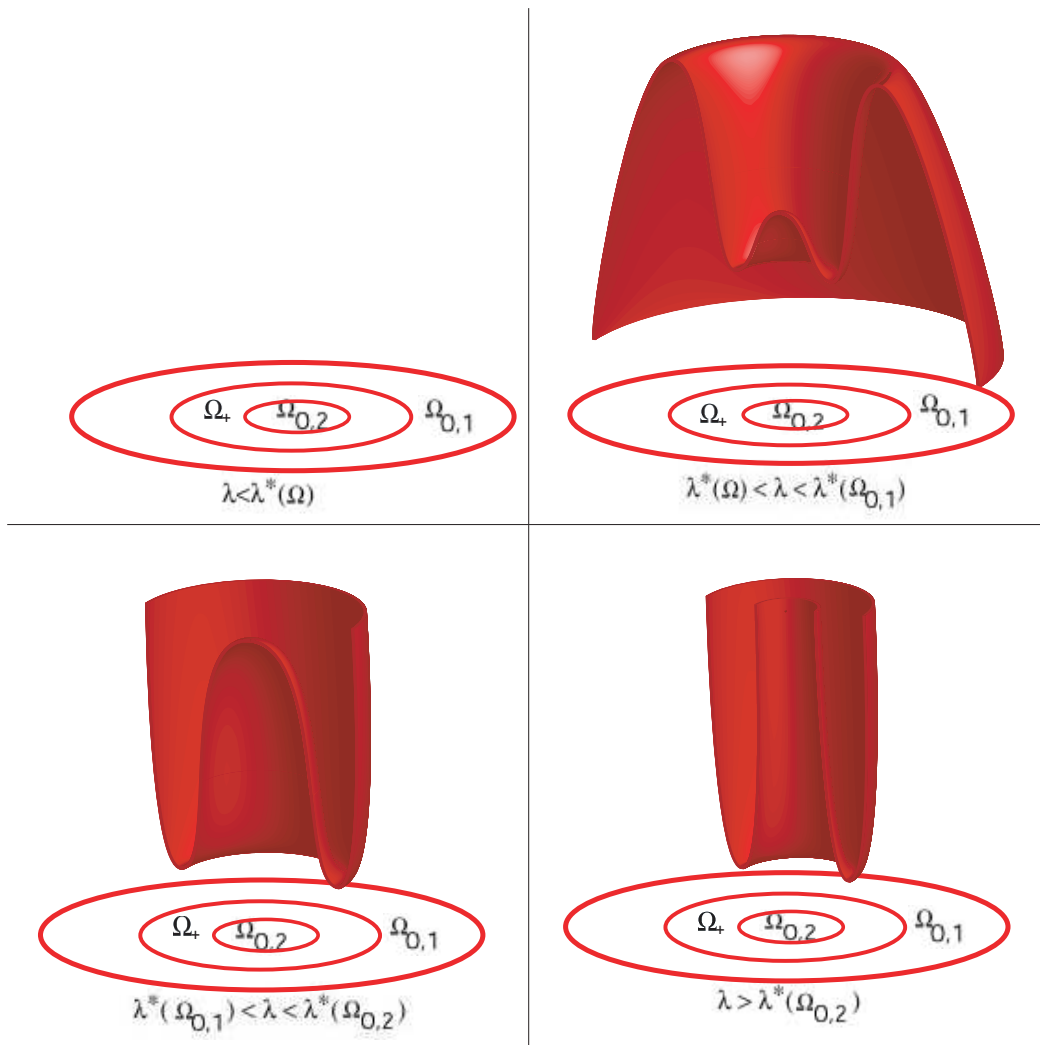


Figura 2.2: Perfiles asintóticos de las soluciones de (2.1.1).



**Observación 2.7** Por el Teorema 1.2, cuando  $(\underline{u}, \underline{v})$  (resp.  $(\bar{u}, \bar{v})$ ) es una subsolución estricta (resp. supersolución) de (2.3.2), entonces cualquier solución

$$(u, v) \in [(\underline{u}, \underline{v}), (\bar{u}, \bar{v})],$$

debe satisfacer

$$\underline{u} < u \leq \bar{u} \quad \text{y} \quad \underline{v} < v \leq \bar{v}, \quad (\text{resp. } \underline{u} \leq u < \bar{u} \quad \text{y} \quad \underline{v} \leq v < \bar{v}).$$

Gracias al Teorema 2.6, el siguiente resultado puede ser obtenido.

**Teorema 2.8** Sea  $(\underline{u}, \underline{v}), (\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{C}^{2+\mu}(D) \times \mathcal{C}^{2+\mu}(D)$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq \lambda \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} - af(\cdot, \underline{u}) \underline{u} \\ -\Delta \underline{v} \leq \delta \underline{u} + \lambda \gamma \underline{v} - bg(\cdot, \underline{v}) \underline{v} \\ \lim_{\text{dist}(x, \partial D) \downarrow 0} (\underline{u}(x), \underline{v}(x)) = (\infty, \infty), \end{cases} \quad \text{en } D,$$

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} \geq \lambda \alpha \bar{u} + \beta \bar{v} - af(\cdot, \bar{u}) \bar{u} \\ -\Delta \bar{v} \geq \delta \bar{u} + \lambda \gamma \bar{v} - bg(\cdot, \bar{v}) \bar{v} \\ \lim_{\text{dist}(x, \partial D) \downarrow 0} (\bar{u}(x), \bar{v}(x)) = (\infty, \infty), \end{cases} \quad \text{en } D,$$

y

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (\bar{u}, \bar{v}) \quad \text{en } D.$$

Entonces, (2.1.8) posee una solución  $(u, v)$ ,  $u, v \in \mathcal{C}^{2+\mu}(D)$ , tal que

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq (u, v) \leq (\bar{u}, \bar{v}).$$

**Demostración.** A continuación, para  $n \geq 1$  suficientemente grande, digamos  $n \geq n_0$ , consideramos

$$D^n := \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) > 1/n\}.$$

El entero  $n_0 \geq 1$  debería ser elegido de forma que  $\partial D_n$  herede la regularidad de  $\partial D$ . Por el Teorema 2.6, para cada  $n \geq n_0$  el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - af(\cdot, u) u \\ -\Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - bg(\cdot, v) v \\ (u, v) = (\frac{\underline{u} + \bar{u}}{2}, \frac{\underline{v} + \bar{v}}{2}) \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{en } D^n, \\ \\ \text{en } \partial D^n, \end{array} \quad (2.3.3)$$

tiene una solución  $(u_n, v_n) \in \mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D}^n) \times \mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D}^n)$  tal que

$$(\underline{u}|_{D^n}, \underline{v}|_{D^n}) \leq (u_n, v_n) \leq (\bar{u}|_{D^n}, \bar{v}|_{D^n}) \quad \text{en } D^n.$$

Debido a estas estimaciones, podemos extraer una subsucesión  $\{(u_{n_m}, v_{n_m})\}_{m \geq 1}$  tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(u_{n_m}, v_{n_m}) - (u_0, v_0)\|_{\mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D}^{n_0}) \times \mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D}^{n_0})} = 0$$

para alguna solución

$$(u_0, v_0) \in \mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D}^{n_0}) \times \mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D}^{n_0})$$

de (2.3.3) en  $n = n_0$ . Ahora, consideramos una nueva sucesión  $\{(u_{n_m}, v_{n_m})|_{D^{n_0+1}}\}_{m \geq 1}$ . Razonando de la misma manera tendremos la existencia de una subsucesión de

$$\{(u_{n_m}, v_{n_m})|_{D^{n_0+1}}\}_{m \geq 1},$$

que llamaremos de nuevo por  $n_m$ , tal que, para alguna solución

$$(u_1, v_1) \in \mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D}^{n_0+1}) \times \mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D}^{n_0+1})$$

de (2.3.3) en  $n = n_0 + 1$ , uno tiene que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(u_{n_m}, v_{n_m}) - (u_1, v_1)\|_{\mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D}^{n_0+1}) \times \mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D}^{n_0+1})} = 0.$$

Necesariamente,

$$(u_1, v_1)|_{D^{n_0}} = (u_0, v_0)$$

por construcción. Iterando este esquema, resulta aparente que el límite puntual de la sucesión diagonal nos proporciona una solución de (2.1.8) que cumpla los requerimientos establecidos. Esto concluye la demostración. ■

El siguiente resultado va a ser utilizado a lo largo de este capítulo y el siguiente.

**Lema 2.9** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3),  $h_1, h_2 \in \mathcal{C}^{2+\mu}(\partial D)$  satisfacen*

$$(h_1, h_2) \geq (0, 0),$$

*y  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D}) \times \mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D})$  es una supersolución de (2.3.2) con  $\bar{u} > 0$  y  $\bar{v} > 0$ . Entonces,*

$$\bar{u} \gg 0 \quad \text{y} \quad \bar{v} \gg 0$$

*en  $D$ . En particular, cualquier solución  $(u, v)$  de (2.3.2) con  $u > 0$  y  $v > 0$  satisface que*

$$u \gg 0 \quad \text{y} \quad v \gg 0.$$

*Además,*

$$\sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, \bar{u}), -\lambda\gamma + bg(\cdot, \bar{v})), D] \geq 0,$$

*y, para cada  $\kappa > 1$ , el par  $(\kappa\bar{u}, \kappa\bar{v})$  también será una supersolución de (2.3.2). Si, además,  $(h_1, h_2) = (0, 0)$  y  $(\bar{u}, \bar{v})$  resuelve (2.3.2), entonces*

$$\sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, \bar{u}), -\lambda\gamma + bg(\cdot, \bar{v})), D] = 0. \quad (2.3.4)$$

**Demostración.** Puesto que estamos asumiendo que  $\bar{u} > 0$  y  $\bar{v} > 0$  en  $D$ ,

$$\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, \bar{u}), -\lambda\gamma + bg(\cdot, \bar{v})) \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{en } D,$$

y

$$(\bar{u}, \bar{v}) \geq (h_1, h_2) \geq (0, 0) \quad \text{en } \partial D.$$

Dos situaciones diferentes pueden ocurrir. Supongamos que  $(\bar{u}, \bar{v})$  es una supersolución estricta. Entonces, de acuerdo con el Teorema 1.2,

$$\bar{u} \gg 0, \quad \bar{v} \gg 0,$$

y

$$\sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, \bar{u}), -\lambda\gamma + bg(\cdot, \bar{v})), D] > 0. \quad (2.3.5)$$

Si  $(\bar{u}, \bar{v})$  no es una supersolución estricta, entonces  $(\bar{u}, \bar{v})$  resuelve (2.3.2) y las mismas conclusiones pueden ser obtenidas si  $(h_1, h_2) > 0$ . Por lo que, suponemos que  $h_1 = h_2 = 0$  y  $(\bar{u}, \bar{v})$  resuelve (2.3.2). Entonces, por la unicidad del auto-par principal, obtendremos que

$$\sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, \bar{u}), -\lambda\gamma + bg(\cdot, \bar{v})), D] = 0.$$

Además,  $\bar{u} \gg 0$  y  $\bar{v} \gg 0$ . Finalmente, sea  $\kappa > 1$ . Entonces,

$$\kappa\bar{u}|_{\partial D} \geq \bar{u}|_{\partial D} \geq h_1, \quad \kappa\bar{v}|_{\partial D} \geq \bar{v}|_{\partial D} \geq h_2$$

y, en  $D$ , tenemos que

$$\begin{aligned} -\Delta(\kappa\bar{u}) &\geq \lambda\alpha\kappa\bar{u} + \beta\kappa\bar{v} - af(\cdot, \bar{u})\kappa\bar{u} \geq \lambda\alpha\kappa\bar{u} + \beta\kappa\bar{v} - af(\cdot, \kappa\bar{u})\kappa\bar{u}, \\ -\Delta(\kappa\bar{v}) &\geq \delta\kappa\bar{u} + \lambda\gamma\kappa\bar{v} - bg(\cdot, \bar{v})\kappa\bar{v} \geq \delta\kappa\bar{u} + \lambda\gamma\kappa\bar{v} - bg(\cdot, \kappa\bar{v})\kappa\bar{v}, \end{aligned}$$

ya que, debido a (B3),

$$f(\cdot, \kappa\bar{u}) > f(\cdot, \bar{u}) \quad \text{y} \quad g(\cdot, \kappa\bar{v}) > g(\cdot, \bar{v})$$

para todo  $\kappa > 1$ . ■

Por el Lema 2.9, cualquier solución de (2.3.2) no-negativa y distinta de cero debe ser fuertemente positiva (estado de coexistencia). Además, el siguiente resultado establece que (2.3.2) no puede admitir ninguna solución semi-trivial positiva (solución positiva  $(u, v)$  con  $u = 0$ , o  $v = 0$ ).

**Lema 2.10** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3),  $h_1, h_2 \in \mathcal{C}^{2+\mu}(\partial D)$  satisfacen*

$$(h_1, h_2) \geq (0, 0),$$

*y  $(u, v) > (0, 0)$ ,  $u, v \in \mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D})$ , resuelve (2.3.2). Entonces,*

$$u \gg 0 \quad \text{y} \quad v \gg 0.$$

**Demostración.** Supongamos, por ejemplo,  $u = 0$ . Entonces, gracias a (2.3.2) obtendremos que  $v = 0$  en la región abierta donde  $\beta > 0$  y, puesto que

$$-\Delta v = \lambda\gamma v - bg(\cdot, v)v \quad \text{en } D, \quad v = h_2 \geq 0 \quad \text{en } \partial D,$$

necesariamente

$$v = 0 \quad \text{en } D.$$

De hecho, si  $v > 0$  en  $D$ , entonces,  $v$  es una supersolución positiva de  $-\Delta - \lambda\gamma + bg(\cdot, v)$  en  $D$ , y, por tanto, por el Teorema 1.2,  $v \gg 0$ , lo que es imposible, para  $v = 0$  en  $\beta > 0$ . De manera que,

$$u = v = 0 \quad \text{si } u = 0.$$

Similarmente,

$$u = v = 0 \quad \text{si } v = 0,$$

puesto que estamos asumiendo que  $\delta > 0$ . Por lo tanto,

$$u > 0 \quad \text{y} \quad v > 0, \quad \text{si } (u, v) > (0, 0).$$

Para finalizar la demostración aplicaremos directamente el Lema 2.9. ■

El siguiente resultado será pivotal a través del restante análisis matemático.

**Teorema 2.11** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3), (2.3.2) posee una supersolución  $(\bar{u}, \bar{v})$  con*

$$\bar{u} > 0 \quad \text{y} \quad \bar{v} > 0,$$

*$h_1, h_2 \in C^{2+\mu}(\partial D)$  satisfacen*

$$h_1 \geq 0, \quad h_2 \geq 0,$$

y

$$\Sigma[\lambda, D] := \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma), D] < 0 \quad \text{si } h_1 = h_2 = 0. \quad (2.3.6)$$

*Entonces, (2.3.2) tiene un único estado de coexistencia. Además, si lo denotamos por*

$$\theta_{[\lambda, D, h]}, \quad \text{con } h := (h_1, h_2),$$

*entonces para cualquier subsolución positiva (resp. supersolución)  $(\underline{u}, \underline{v})$  (resp.  $(\bar{u}, \bar{v})$ ) de (2.3.2) tal que*

$$(\underline{u}, \underline{v}) > (0, 0) \quad (\text{resp. } \bar{u} > 0 \text{ y } \bar{v} > 0),$$

*uno tiene que*

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq \theta_{[\lambda, D, h]} \quad (\text{resp. } \theta_{[\lambda, D, h]} \leq (\bar{u}, \bar{v})).$$

*Además, cuando  $u_0 > 0$  y  $v_0 > 0$ , se obtiene lo siguiente*

$$\lim_{t \uparrow \infty} \| (u_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t; u_0, v_0)) - \theta_{[\lambda, D, h]} \|_{C(\bar{D}) \times C(\bar{D})} = 0, \quad (2.3.7)$$

donde  $(u_{[\lambda, D, h]}(x, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, D, h]}(x, t; u_0, v_0))$  representa la única solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - a f(\cdot, u)u & \text{en } D \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - b g(\cdot, v)v & \text{en } \partial D \times (0, \infty), \\ (u, v) = h = (h_1, h_2) & \text{en } D, \\ (u(\cdot, 0), v(\cdot, 0)) = (u_0, v_0) & \text{en } D. \end{cases} \quad (2.3.8)$$

Por otra parte, si  $f, g$  satisfacen (B3),  $h_1 = h_2 = 0$  y  $\Sigma[\lambda, D] \geq 0$ , entonces (2.3.2) no puede admitir una subsolución positiva y

$$\lim_{t \uparrow \infty} \| (u_{[\lambda, D, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, D, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0)) \|_{C(\bar{D}) \times C(\bar{D})} = 0. \quad (2.3.9)$$

**Demostración.** Supongamos que

$$h = (h_1, h_2) > (0, 0).$$

Entonces,

$$(\underline{u}, \underline{v}) := (0, 0)$$

es una subsolución estricta de (2.3.2), y, por eso,

$$[(0, 0), (\bar{u}, \bar{v})]$$

nos proporciona con un par ordenado de sub-supersoluciones. Por lo que, gracias al Teorema 2.6, (2.3.2) posee una solución  $(u, v)$  tal que

$$0 \leq u \leq \bar{u} \quad \text{y} \quad 0 \leq v \leq \bar{v}.$$

Puesto que estamos asumiendo que  $h > (0, 0)$ , necesariamente  $(u, v) > (0, 0)$  y, por lo tanto, debido al Lema 2.10,

$$u \gg 0 \quad \text{y} \quad v \gg 0.$$

Ahora, supongamos que

$$h = (0, 0).$$

Entonces, por (2.3.6),

$$\Sigma[\lambda, D] := \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma), D] < 0.$$

Denotamos  $(\varphi, \psi)$  como la autofunción principal asociada con  $\Sigma[\lambda, D]$ . Entonces,

$$\varphi \gg 0, \quad \psi \gg 0,$$

y para un  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, la función

$$(\underline{u}, \underline{v}) := (\varepsilon\varphi, \varepsilon\psi)$$

será una subsolución positiva estricta de (2.3.2). De hecho,

$$(\varepsilon\varphi, \varepsilon\psi)|_{\partial D} = (0, 0),$$

y, en  $D$ ,

$$\begin{cases} -\Delta(\varepsilon\varphi) - \lambda\alpha\varepsilon\varphi - \varepsilon\beta\psi = \varepsilon\Sigma[\lambda, D]\varphi < -af(\cdot, \varepsilon\varphi)\varepsilon\varphi \\ -\Delta(\varepsilon\psi) - \varepsilon\delta\varphi - \lambda\gamma\varepsilon\psi = \varepsilon\Sigma[\lambda, D]\psi < -bg(\cdot, \varepsilon\psi)\varepsilon\psi \end{cases}$$

para un  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, porque,

$$\Sigma[\lambda, D] < 0, \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|af(\cdot, \varepsilon\varphi)\|_{C(\bar{D})} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|bg(\cdot, \varepsilon\psi)\|_{C(\bar{D})} = 0.$$

A continuación, fijamos uno de estos valores de  $\varepsilon$ . Por construcción,

$$\underline{u} = \varepsilon\varphi \gg 0 \quad \text{y} \quad \underline{v} = \varepsilon\psi \gg 0$$

Además, por el Lema 2.9,

$$\bar{u} \gg 0, \quad \bar{v} \gg 0,$$

y

$$(\kappa\bar{u}, \kappa\bar{v})$$

es una supersolución de (2.3.2) para cada  $\kappa > 1$ . Sea  $\kappa > 1$  tal que

$$\varepsilon\varphi < \kappa\bar{u} \quad \text{y} \quad \varepsilon\psi < \kappa\bar{v}$$

Entonces,

$$[(\varepsilon\varphi, \varepsilon\psi), (\kappa\bar{u}, \kappa\bar{v})]$$

nos proporciona con un par ordenado de sub-super soluciones de (2.3.2) y, por tanto, gracias al Teorema 2.6, (2.3.2) posee una solución  $(u, v)$  tal que

$$\varepsilon\varphi < u \leq \kappa\bar{u} \quad \text{y} \quad \varepsilon\psi < v \leq \kappa\bar{v}.$$

Señalar que, de acuerdo con el Lema 2.9,

$$u \gg 0 \quad \text{y} \quad v \gg 0.$$

Esto concluye la demostración de la existencia de un estado de coexistencia.

Para la demostración de la unicidad procederemos por contradicción. Supongamos que (2.3.2) tiene dos estados de coexistencia

$$(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2).$$

El análisis realizado con anterioridad nos muestra que existen  $\varepsilon > 0$ ,  $\kappa > 1$ , y una subsolución estricta

$$(\underline{u}, \underline{v}) \in \{(0, 0), (\varepsilon\varphi, \varepsilon\psi)\},$$

tal que

$$\underline{u} < \min\{u_1, u_2\} < \max\{u_1, u_2\} \leq \kappa\bar{u}, \quad \underline{v} < \min\{v_1, v_2\} < \max\{v_1, v_2\} \leq \kappa\bar{v}.$$

Denotamos mediante

$$(u_*, v_*) \quad \text{y} \quad (u^*, v^*)$$

los estados de coexistencia minimal y maximal de (2.3.2) en  $[(\underline{u}, \underline{v}), (\kappa\bar{u}, \kappa\bar{v})]$ . Necesariamente,

$$\begin{aligned} \underline{u} < u_* \leq \min\{u_1, u_2\} < \max\{u_1, u_2\} \leq u^* \leq \kappa\bar{u}, \\ \underline{v} < v_* \leq \min\{v_1, v_2\} < \max\{v_1, v_2\} \leq v^* \leq \kappa\bar{v}, \end{aligned}$$

y, por lo tanto, (2.3.2) tiene dos estados de coexistencia ordenados, ya que

$$u_* < u^* \quad \text{y} \quad v_* < v^*.$$

Ponemos

$$w_1 := u^* - u_* > 0, \quad w_2 := v^* - v_* > 0.$$

Entonces ,

$$\begin{cases} (-\Delta - \lambda\alpha + V_1)w_1 - \beta w_2 = 0 \\ (-\Delta - \lambda\gamma + V_2)w_2 - \delta w_1 = 0 \\ (w_1, w_2) = (0, 0) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{en } D, \\ \\ \text{en } \partial D, \end{matrix} \quad (2.3.10)$$

donde  $V_1$  y  $V_2$  están dados mediante las expresiones

$$\begin{aligned} V_1 &:= a \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, tu^* + (1-t)u_*)(tu^* + (1-t)u_*) dt + a \int_0^1 f(\cdot, tu^* + (1-t)u_*) dt, \\ V_2 &:= b \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial v}(\cdot, tv^* + (1-t)v_*)(tv^* + (1-t)v_*) dt + b \int_0^1 g(\cdot, tv^* + (1-t)v_*) dt. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.10,

$$(u^*, v^*) \gg (0, 0), \quad \text{y} \quad (u_*, v_*) \gg (0, 0).$$

De manera que, (B3) y (2.3.1) implican que

$$\begin{aligned} V_1 &> a \int_0^1 f(\cdot, tu^* + (1-t)u_*) dt \geq af(\cdot, u_*), \\ V_2 &> b \int_0^1 g(\cdot, tv^* + (1-t)v_*) dt \geq bg(\cdot, v_*), \end{aligned}$$

ya que  $u^* > u_*$  y  $v^* > v_*$ . Por lo tanto, combinando el Lema 2.9 con la monotonía del autovalor principal con respecto del potencial, Proposición 1.3(a), obtenemos que

$$\sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + V_1, -\lambda\gamma + V_2), D] > \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u_*), -\lambda\gamma + bg(\cdot, v_*)), D] = 0.$$

Por otro lado, por (2.3.10),

$$(w_1, w_2) \gg (0, 0)$$

será la autofunción de  $\mathcal{A}(-\lambda\alpha + V_1, -\lambda\gamma + V_2)$  asociada con el autovalor 0, y, por consiguiente,

$$\sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + V_1, -\lambda\gamma + V_2), D] = 0;$$

con lo que obtenemos una contradicción con la que finalizamos la demostración de la unicidad.

A continuación, denotamos por

$$\theta_{[\lambda, D, h]}, \quad \text{con } h := (h_1, h_2),$$

el único estado de coexistencia de (2.3.2). Sea  $(\underline{u}, \underline{v})$  una subsolución de (2.3.2) con  $(\underline{u}, \underline{v}) > (0, 0)$ . Entonces, puesto que

$$\underline{u} < \kappa \bar{u}, \quad \text{y} \quad \underline{v} < \kappa \bar{v},$$

para  $\kappa > 1$  suficientemente grande, (2.3.2) tiene un estado de coexistencia en

$$[(\underline{u}, \underline{v}), (\kappa \bar{u}, \kappa \bar{v})],$$

por el Teorema 2.6. Por la unicidad,

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq \theta_{[\lambda, D, h]} \leq \kappa(\bar{u}, \bar{v}),$$

y, en particular,

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq \theta_{[\lambda, D, h]}.$$

Sea  $(\bar{u}, \bar{v})$  una supersolución de (2.3.2) con  $\bar{u} > 0$  y  $\bar{v} > 0$ . Por el Lema 2.9,  $\bar{u} \gg 0$  y  $\bar{v} \gg 0$ . Supongamos que  $h > (0, 0)$ . Entonces,  $(\underline{u}, \underline{v}) = (0, 0)$  será una subsolución estricta de (2.3.2) y, debido al Teorema 2.3.2, (2.3.2) tiene un estado de coexistencia  $(u, v)$  dentro  $[(0, 0), (\bar{u}, \bar{v})]$ . Así que, por la unicidad, obtenemos que

$$\theta_{[\lambda, D, h]} \leq (\bar{u}, \bar{v}). \quad (2.3.11)$$

Supongamos que  $h = (0, 0)$ . Entonces,  $\Sigma[\lambda, D] < 0$  y, para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño,

$$(\underline{u}, \underline{v}) := (\varepsilon\varphi, \varepsilon\psi)$$

será una subsolución estricta de (2.3.2). De manera que, si  $\varepsilon$  es elegido tal que

$$\varepsilon\varphi < \bar{u} \quad \text{y} \quad \varepsilon\psi < \bar{v},$$

por el Teorema 2.6, (2.3.2) admite un estado de coexistencia  $(u, v)$  incluído en  $[(\varepsilon\varphi, \varepsilon\psi), (\bar{u}, \bar{v})]$ . Por lo tanto, por la unicidad, (2.3.11) es obtenida también.

El resto de la demostración está basada en la siguiente versión para sistemas cooperativos de un teorema muy celebre de Sattinger [61]. Los detalles técnicos de su demostración son omitidos en esta Memoria (cf. Amann [7] y su lista de referencias para adicional detalles).



**Proposición 2.12** Para cada  $h_1, h_2 \in \mathcal{C}^{2+\mu}(\partial D)$  y  $u_0, v_0 \in \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ , denotamos por

$$w_{[\lambda, D, h]}(x, t; u_0, v_0) := (u_{[\lambda, D, h]}(x, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, D, h]}(x, t; u_0, v_0)), \quad h := (h_1, h_2),$$

la única solución de (2.3.8). Entonces,  $h = (h_1, h_2) \leq \tilde{h} = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ ,  $(u_0, v_0) \leq (\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$  y  $(\tilde{u}_0 - u_0, \tilde{v}_0 - v_0) + \tilde{h} - h > (0, 0)$  implican que

$$w_{[\lambda, D, h]}(x, t; u_0, v_0) \ll w_{[\lambda, D, \tilde{h}]}(x, t; \tilde{u}_0, \tilde{v}_0), \quad t > 0.$$

Además, si  $(u_0, v_0)$  es una subsolución estricta de (2.3.2), entonces

$$w_{[\lambda, D, h]}(x, t; u_0, v_0) \gg w_{[\lambda, D, h]}(x, s; u_0, v_0), \quad t > s > 0,$$

mientras que si  $(u_0, v_0)$  es una supersolución estricta de (2.3.2), entonces

$$w_{[\lambda, D, h]}(x, t; u_0, v_0) \ll w_{[\lambda, D, h]}(x, s; u_0, v_0), \quad t > s > 0.$$

Por otro lado, si  $(u_0, v_0)$  es una subsolución estricta (resp. supersolución) de (2.3.2) y la solución

$$w_{[\lambda, D, h]}(x, t; u_0, v_0)$$

es acotada por arriba (resp. por abajo), entonces

$$\lim_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, D, h]}(x, t; u_0, v_0)$$

está bien definido y será una solución de (2.3.2).

A continuación, probaremos (2.3.7). Puesto que

$$(u_0, v_0) > (0, 0),$$

de la Proposición 2.12 obtenemos que

$$w_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t; u_0, v_0) := (u_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t; u_0, v_0)) \gg (0, 0).$$

De manera que, existen  $\varepsilon > 0$ ,  $\kappa > 1$ , y una subsolución estricta

$$(\underline{u}, \underline{v}) \in \{(0, 0), (\varepsilon\varphi, \varepsilon\psi)\}$$

tal que

$$(0, 0) \leq (\underline{u}, \underline{v}) < w_{[\lambda, D, h]}(\cdot, 1; u_0, v_0) \ll (\kappa\bar{u}, \kappa\bar{v}).$$

Por lo tanto, gracias de nuevo a la Proposición 2.12, obtenemos que

$$\begin{aligned} w_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t; \underline{u}, \underline{v}) &\ll w_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t; w_{[\lambda, D, h]}(\cdot, 1; u_0, v_0)) \\ &= w_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t+1; u_0, v_0) \\ &\ll w_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t; \kappa\bar{u}, \kappa\bar{v}) \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

para cada  $t > 1$ . Además,

$$t \mapsto w_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t; \underline{u}, \underline{v}),$$

es creciente, y

$$t \mapsto w_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t; \kappa \bar{u}, \kappa \bar{v}),$$

es decreciente. Así que, ambas soluciones convergen cuando  $t \uparrow \infty$  a alguna solución de (2.3.2). En realidad, estos límites deben ser estados de coexistencia de (2.3.2) y, por consiguiente, por la unicidad, deben aproximarse a  $\theta_{[\lambda, D, h]}$ . Por lo tanto, pasando al límite cuando  $t \uparrow \infty$  en (2.3.12) obtendremos (2.3.7).

Finalmente, supongamos que

$$h_1 = h_2 = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma[\lambda, D] := \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma), D] \geq 0. \quad (2.3.13)$$

Afirmamos que (2.3.2) no puede admitir una subsolución positiva; en particular, no puede admitir un estado de coexistencia. Probaremos esto por un razonamiento de contradicción.

Supongamos que (2.3.2) posee una subsolución positiva

$$(\underline{u}, \underline{v}) > (0, 0).$$

Por el Lema 2.9,

$$(\bar{u}, \bar{v}) \gg (0, 0),$$

y, para cada  $\kappa > 1$ ,  $(\kappa \bar{u}, \kappa \bar{v})$  es una supersolución positiva de (2.3.2). Sea  $\kappa > 1$  tal que

$$\underline{u} < \kappa \bar{u} \quad \text{y} \quad \underline{v} < \kappa \bar{v}.$$

Por el Teorema 2.3.2, (2.3.2) posee una solución  $(u, v)$  en  $[(\underline{u}, \underline{v}), (\kappa \bar{u}, \kappa \bar{v})]$ . De acuerdo con el Lema 2.10,

$$(u, v) \gg (0, 0).$$

Además,

$$0 = \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\gamma + bg(\cdot, v)), D].$$

Como  $(u, v) \gg (0, 0)$ , debido a (B3) y (2.3.1) tendremos que

$$af(\cdot, u) > 0 \quad \text{y} \quad bg(\cdot, v) > 0, \quad \text{en } D.$$

De manera que, por la monotonía del autovalor principal con respecto del potencial, Proposición 1.3(a),

$$0 = \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\gamma + bg(\cdot, v)), D] > \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma), D] = \Sigma[\lambda, D],$$

lo que contradice (2.3.13). Por lo tanto, (2.3.2) no puede admitir una subsolución positiva.

Finalmente, para probar (2.3.9), consideramos  $\kappa > 1$  tal que

$$(0, 0) \ll w_{[\lambda, D, h]}(\cdot, 1; u_0, v_0) < (\kappa \bar{u}, \kappa \bar{v}).$$

Entonces, de acuerdo con la Proposición 2.12, tendremos que, para cualquier  $t > 0$ ,

$$w_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t+1; u_0, v_0) \ll w_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t; \kappa \bar{u}, \kappa \bar{v})$$

Como  $(\kappa \bar{u}, \kappa \bar{v})$  es una supersolución de (2.3.2), por la Proposición 2.12,

$$t \mapsto w_{[\lambda, D, h]}(\cdot, t; \kappa \bar{u}, \kappa \bar{v})$$

es decreciente aproximándose a una solución no-negativa de (2.3.2); necesariamente  $(0, 0)$ , ya que sabemos que (2.3.2) no puede admitir un estado de coexistencia. Esto concluye la demostración. ■

Finalizamos esta sección con la siguiente comparación fuerte.

**Lema 2.13** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3), (2.3.2) posee una supersolución  $(\bar{u}, \bar{v})$  con*

$$\bar{u} > 0 \quad y \quad \bar{v} > 0,$$

*y  $h_1, h_2 \in \mathcal{C}^{2+\mu}(\partial D)$  satisfacen*

$$h := (h_1, h_2) \geq (0, 0)$$

*y (2.3.6). Entonces, para cualquier subsolución positiva estricta (resp. supersolución)  $(\underline{u}, \underline{v})$  (resp.  $(\bar{u}, \bar{v})$ ) de (2.3.2), uno tiene que*

$$(\underline{u}, \underline{v}) \ll \theta_{[\lambda, D, h]}$$

*(resp.  $\theta_{[\lambda, D, h]} \ll (\bar{u}, \bar{v})$ ), donde  $\theta_{[\lambda, D, h]}$  representa el único estado de coexistencia de (2.3.2).*

**Demostración.** Por el Teorema 2.11,

$$(\underline{u}, \underline{v}) \leq \theta_{[\lambda, D, h]},$$

aunque, en realidad,

$$(\underline{u}, \underline{v}) < \theta_{[\lambda, D, h]},$$

puesto que  $(\underline{u}, \underline{v})$  no es una solución de (2.3.2). Por eso,

$$w = (w_1, w_2) := \theta_{[\lambda, D, h]} - (\underline{u}, \underline{v}) > (0, 0).$$

Ahora, razonando como en la demostración de la unicidad del Teorema 2.11, obtendremos que

$$\begin{cases} (-\Delta - \lambda\alpha + V_1)w_1 - \beta w_2 = 0 \\ (-\Delta - \lambda\gamma + V_2)w_2 - \delta w_1 = 0 \\ (w_1, w_2) \geq (0, 0) \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{en } D, \\ \\ \text{en } \partial D, \end{array}$$

donde, poniendo

$$\theta_{[\lambda, D, h]} = (\theta_1, \theta_2),$$

$V_1$  y  $V_2$  serán los potenciales definidos mediante

$$\begin{aligned} V_1 &:= a \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, t\theta_1 + (1-t)\underline{u})(t\theta_1 + (1-t)\underline{u}) dt + a \int_0^1 f(\cdot, t\theta_1 + (1-t)\underline{u}) dt, \\ V_2 &:= b \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial v}(\cdot, t\theta_2 + (1-t)\underline{v})(t\theta_2 + (1-t)\underline{v}) dt + b \int_0^1 g(\cdot, t\theta_2 + (1-t)\underline{v}) dt. \end{aligned}$$

A continuación, distinguimos dos situaciones distintas. Si

$$w|_{\partial D} > (0, 0),$$

entonces

$$w > (0, 0)$$

será una supersolución positiva estricta de  $\mathcal{A}(-\lambda\alpha + V_1, -\lambda\gamma + V_2)$  bajo condiciones de frontera Dirichlet homogéneas, y por tanto, debido al Teorema 1.2,

$$w \gg (0, 0), \quad \text{en } D.$$

Por consiguiente,

$$(\underline{u}, \underline{v}) \ll \theta_{[\lambda, D, h]}.$$

Si

$$w|_{\partial D} = (0, 0),$$

entonces

$$(w_1, w_2) > (0, 0)$$

es una autofunción principal asociada con

$$\sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + V_1, -\lambda\gamma + V_2), D] = 0$$

y, por el Teorema de Krein-Rutman,  $(w_1, w_2) \gg (0, 0)$ . Esto concluye la demostración. ■

## 2.4 El problema en $D \subset \Omega_+$ . Cotas a priori en $\Omega_+$

En esta sección analizamos la dinámica de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda\alpha(x)u + \beta(x)v - a(x)f(x, u)u & \text{en } D \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \delta(x)u + \lambda\gamma(x)v - b(x)g(x, v)v & \text{en } D \times (0, \infty), \\ (u, v) = (M, N) & \text{en } \partial D \times (0, \infty), \\ (u(\cdot, 0), v(\cdot, 0)) = (u_0, v_0) > (0, 0) & \text{en } D, \end{cases} \quad (2.4.1)$$

donde  $M, N \in [0, \infty)$  son constantes,  $D$  es un subdominio suave de  $\Omega$  tal que

$$D \subset \Omega_+ \quad (2.4.2)$$

y  $f, g$  satisfacen (B3-4). Nuestro principal resultado establece que la dinámica de (2.4.1) está regulada por su estado de coexistencia maximal, i.e., por la solución maximal no-negativa de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - a(x)f(x, u)u & \text{en } D, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - b(x)g(x, v)v & \\ (u, v) = (M, N) & \text{en } \partial D. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

En realidad, para cada  $(M, N) > (0, 0)$ , (2.4.3) posee un único estado de coexistencia, denotado por  $\theta_{[\lambda, D, M, N]}$ , el cual es un atractor global para las soluciones de (2.4.1). Además, satisface

$$\lim_{(M, N) \downarrow (0, 0)} \theta_{[\lambda, D, M, N]} = (0, 0)$$

si  $\Sigma[\lambda, D] \geq 0$  (ver (2.1.3)), mientras que

$$\theta_{[\lambda, D, 0, 0]} := \lim_{(M, N) \downarrow (0, 0)} \theta_{[\lambda, D, M, N]}$$

es el único estado de coexistencia de (2.4.3) para  $(M, N) = (0, 0)$  si  $\Sigma[\lambda, D] < 0$ .

Analizar (2.4.1) cuando  $\bar{D} \subset \Omega_+$  es sustancialmente más sencilla que estudiar el problema general cuando  $D \subset \Omega_+$ , porque en este último caso los coeficientes  $a(x)$  y  $b(x)$  podrían anularse sobre  $\partial D$  y, por consiguiente, las constantes positivas grandes no serán supersoluciones como en el primer caso. Dicho lo cual, las dos primeras subsecciones estarán dedicadas al estudio del caso más simple cuando  $\bar{D} \subset \Omega_+$ .

Por otro lado, en la Subsección 2.4.3 obtendremos cotas a priori universales para el caso general, el cual nos permitirá obtener la existencia de una solución positiva minimal y una maximal del problema singular

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - a(x)f(x, u)u & \text{en } D, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - b(x)g(x, v)v & \\ (u, v) = (\infty, \infty) & \text{en } \partial D. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

A partir de estas cotas a priori resulta aparente que

$$\theta_{[\lambda, D, \infty, \infty]} := \lim_{M, N \uparrow \infty} \theta_{[\lambda, D, M, N]}$$

es una solución positiva minimal de (2.4.4).

Finalmente, la Subsección 2.4.4 tratará con el caso general cuando la condición (2.4.2) es satisfecha. La siguiente consecuencia de los Lemas 2.9 y 2.10 será utilizada a lo largo de esta sección.

**Lema 2.14** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3),  $M, N \in [0, \infty)$ , y  $(u, v) > (0, 0)$ ,  $u, v \in \mathcal{C}^{2+\mu}(\bar{D})$ , es una solución de (2.4.3). Entonces,*

$$u \gg 0, \quad v \gg 0,$$

y

$$\sigma [\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\gamma + bg(\cdot, v)), D] > 0 \quad (2.4.5)$$

si  $(M, N) > (0, 0)$ , mientras, en el caso en que  $M = N = 0$ ,

$$\sigma [\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\gamma + bg(\cdot, v)), D] = 0. \quad (2.4.6)$$

Además, en el caso en que  $M = N = \infty$ , cualquier solución  $(u, v) > (0, 0)$ ,  $u, v \in \mathcal{C}^{2+\mu}(D)$ , de (2.4.4) satisface que  $u(x) > 0$  y  $v(x) > 0$  para todo  $x \in D$ .

**Demostración.** El hecho que  $(u, v) \gg (0, 0)$  para cualquier solución positiva de (2.4.3) con  $M, N \in [0, \infty)$  es una consecuencia del Lema 2.9. La condición (2.4.5) se obtiene del Teorema 1.2 y (2.4.6) es una consecuencia de (2.3.4).

Ahora, supongamos que  $M = N = \infty$ . Entonces,  $(u, v)$  es una supersolución positiva estricta de  $\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\gamma + bg(\cdot, v))$  en algún subdominio de la forma

$$D^n := \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) > 1/n\} \quad (2.4.7)$$

para un  $n$  suficientemente grande, y, por eso, la demostración de (2.3.5) del Lema 2.9 nos muestra que

$$(u, v) \gg (0, 0) \quad \text{en} \quad D^n,$$

lo que concluye la demostración. ■

A lo largo de este capítulo, para cualquier  $h \in \mathcal{C}(\bar{D})$  denotaremos

$$h_{L, \bar{D}} := \min_{\bar{D}} h, \quad h_{U, \bar{D}} := \max_{\bar{D}} h. \quad (2.4.8)$$

### 2.4.1 Caso $M = N = 0$ y $\bar{D} \subset \Omega_+$

El siguiente resultado caracteriza la dinámica de (2.4.1) en este caso especial. Proviene esencialmente de Molina-Meyer [54], [53].

**Teorema 2.15** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3-4),  $\bar{D} \subset \Omega_+$ , y  $M = N = 0$ . Entonces, (2.4.3) tiene un estado de coexistencia sí, y sólo si*

$$\Sigma[\lambda, D] < 0.$$

Además, es único, si existe y lo denotamos por  $\theta_{[\lambda, D, 0, 0]}$ , así como

$$w_{[\lambda, D, 0, 0]}(x, t; u_0, v_0) := (u_{[\lambda, D, 0, 0]}(x, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, D, 0, 0]}(x, t; u_0, v_0))$$

la única solución de (2.4.1). Entonces,

(a)  $\lim_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, D, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) = (0, 0)$  en  $\mathcal{C}(\bar{D}) \times \mathcal{C}(\bar{D})$  si  $\Sigma[\lambda, D] \geq 0$ .

(b)  $\lim_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, D, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) = \theta_{[\lambda, D, 0, 0]}$  en  $\mathcal{C}(\bar{D}) \times \mathcal{C}(\bar{D})$  si  $\Sigma[\lambda, D] < 0$ .

**Demostración.** Es una consecuencia directa del Teorema 2.11, ya que  $(C, C)$  será una supersolución positiva de (2.4.3) para cualquier constante positiva suficientemente grande  $C > 0$ . De hecho, puesto que  $\bar{D} \subset \Omega_+$ , tenemos que

$$a_{L, \bar{D}} > 0 \quad \text{y} \quad b_{L, \bar{D}} > 0.$$

Además, por (2.1.4),

$$\lim_{C \uparrow \infty} f(\cdot, C) = \lim_{C \uparrow \infty} g(\cdot, C) = \infty \quad \text{uniformemente en } \bar{D}.$$

De esta manera, existe  $C_0 > 0$  tal que, para cada  $C \geq C_0$ ,

$$0 \geq \lambda\alpha + \beta - af(\cdot, C) \quad \text{y} \quad 0 \geq \delta + \lambda\gamma - bg(\cdot, C).$$

El Teorema 2.11 concluye la demostración. ■

El siguiente resultado nos proporciona la estructura del conjunto de estados de coexistencia de (2.4.3). En lo sucesivo,  $\lambda^*(D)$  representa el único valor de  $\lambda$  para el cual

$$\Sigma[\lambda^*(D), D] = 0,$$

(ver (2.1.3)). Por (B1),

$$\Sigma[\lambda, D] > 0 \quad \text{si} \quad \lambda < \lambda^*(D),$$

mientras

$$\Sigma[\lambda, D] < 0 \quad \text{si} \quad \lambda > \lambda^*(D),$$

(cf. [48]).

**Teorema 2.16** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3-4),  $\bar{D} \subset \Omega_+$ , y  $M = N = 0$ . Entonces, la aplicación*

$$\begin{aligned} (\lambda^*(D), \infty) & \xrightarrow{\theta} \mathcal{C}(\bar{D}) \times \mathcal{C}(\bar{D}) \\ \lambda & \mapsto \theta(\lambda) := \theta_{[\lambda, D, 0, 0]} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

*es de clase  $C^1$ . Además,  $\theta(\lambda) \gg \theta(\mu)$  si  $\lambda > \mu > \lambda^*(D)$ , y  $\theta(\lambda)$  bifurca desde  $(\lambda, u, v) = (\lambda, 0, 0)$  en  $\lambda = \lambda^*(D)$ , i.e.,*

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda^*(D)} \theta(\lambda) = (0, 0). \quad (2.4.10)$$

**Demostración.** Cuando  $M = N = 0$ , las soluciones de (2.4.3) son los ceros del operador no-lineal

$$\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_0(\bar{D}) \times \mathcal{C}_0(\bar{D}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\bar{D}) \times \mathcal{C}_0(\bar{D})$$

definido por

$$\mathfrak{F}(\lambda, u, v) := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - (-\Delta)^{-1} \begin{pmatrix} \lambda \alpha u + \beta v - af(\cdot, u)u \\ \delta u + \lambda \gamma v - bg(\cdot, v)v \end{pmatrix}$$

donde  $(-\Delta)^{-1}$  representa el inverso de  $-\Delta$  en  $D$  bajo condiciones de frontera Dirichlet homogéneas;  $\mathfrak{F}$  es de clase  $C^1$  y, por regularidad elíptica,  $\mathfrak{F}(\lambda, \cdot, \cdot)$  es una perturbación compacta de la identidad para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Además,

$$\mathfrak{F}(\lambda, 0, 0) = (0, 0)$$

para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  y, por (B3),

$$D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\lambda, 0, 0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - (-\Delta)^{-1} \begin{pmatrix} \lambda \alpha u + \beta v \\ \delta u + \lambda \gamma v \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad u, v \in \mathcal{C}_0(\bar{D}).$$

Por otro lado, denotamos

$$\mathfrak{L}(\lambda) := D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\lambda, 0, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Obviamente,  $\mathfrak{L}(\lambda)$  es Fredholm de índice cero y analítico real en  $\lambda$ , por ser una perturbación compacta de la identidad de tipo lineal con respecto a  $\lambda$ . Además, por regularidad elíptica,  $\lambda_0$  será un valor singular de  $\mathfrak{L}(\lambda)$  sí, y sólo si existe  $(u, v) \neq (0, 0)$  tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_0 \alpha u + \beta v & \text{en } D, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda_0 \gamma v & \text{en } D, \\ (u, v) = (0, 0) & \text{en } \partial D. \end{cases} \quad (2.4.11)$$

De esta manera,  $\lambda_0 := \lambda^*(D)$  es un valor singular de  $\mathfrak{L}(\lambda)$  y asociado con él existe una única solución  $(\varphi, \psi) \gg (0, 0)$  de (2.4.11), salvo constante multiplicativa. Ponemos

$$\mathfrak{L}_0 := \mathfrak{L}(\lambda^*(D)) \quad \text{y} \quad \mathfrak{L}_1 := \frac{d\mathfrak{L}}{d\lambda}(\lambda^*(D)).$$

Entonces, como fue discutido en [48],

$$N[\mathfrak{L}_0] = \text{span} \left[ \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right],$$

y la siguiente condición de transversalidad es obtenida

$$\mathfrak{L}_1 \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \notin R[\mathfrak{L}_0] \quad (2.4.12)$$



(ver Crandall y Rabinowitz [15], [16]). De hecho, supongamos

$$\mathfrak{L}_1 \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = -(-\Delta)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha\varphi \\ \gamma\psi \end{pmatrix} \in R[\mathfrak{L}_0].$$

Entonces, existe  $u, v \in \mathcal{C}_0(\bar{D})$  tal que

$$\begin{pmatrix} u - (-\Delta)^{-1}(\lambda_0\alpha u + \beta v) \\ v - (-\Delta)^{-1}(\delta u + \lambda_0\gamma v) \end{pmatrix} = -(-\Delta)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha\varphi \\ \gamma\psi \end{pmatrix}.$$

Por regularidad elíptica,  $u, v \in \mathcal{C}_0^{2+\mu}(\bar{D})$  y

$$\mathcal{A}(-\lambda_0\alpha, -\lambda_0\gamma) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha\varphi \\ \gamma\psi \end{pmatrix}$$

(ver (2.1.2)). Combinando la versión del teorema de Krein-Rutman dada en Amann [6] con los resultados de positividad de [48], existen  $\varphi^*, \psi^* \in \mathcal{C}_0^{2+\mu}(\bar{D})$ ,  $\varphi^* \gg 0$ ,  $\psi^* \gg 0$ , tal que

$$N[\mathcal{A}^*(-\lambda_0\alpha, -\lambda_0\gamma)] = \text{span} \left[ \begin{pmatrix} \varphi^* \\ \psi^* \end{pmatrix} \right],$$

donde

$$\mathcal{A}^*(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma) := \begin{pmatrix} -\Delta - \lambda\alpha & -\delta \\ -\beta & -\Delta - \lambda\gamma \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

es el adjunto en  $L^2(D) \times L^2(D)$  de  $\mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma)$ . De esta manera,

$$\begin{aligned} - \int_D (\alpha\varphi\varphi^* + \gamma\psi\psi^*) &= \left\langle \mathcal{A}(-\lambda_0\alpha, -\lambda_0\gamma) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi^* \\ \psi^* \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(D) \times L^2(D)} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \mathcal{A}^*(-\lambda_0\alpha, -\lambda_0\gamma) \begin{pmatrix} \varphi^* \\ \psi^* \end{pmatrix} \right\rangle_{L^2(D) \times L^2(D)} = 0, \end{aligned}$$

lo que es imposible, porque

$$\alpha\varphi\varphi^* + \gamma\psi\psi^* > 0.$$

Por lo tanto, la condición (2.4.12) es obtenida. Por consiguiente, de acuerdo con el principal teorema de Crandall y Rabinowitz [15],  $(\lambda, u, v) = (\lambda^*(D), 0, 0)$  es un punto de bifurcación desde  $(\lambda, u, v) = (\lambda, 0, 0)$  a una curva suave de estados de coexistencia de (2.4.3), ya que  $\varphi \gg 0$  y  $\psi \gg 0$ . Por la unicidad del estado de coexistencia del Teorema 2.15, la condición (2.4.10) es obtenida.

Sea  $(\lambda, u, v) = (\lambda_0, u_0, v_0)$  un estado de coexistencia de (2.4.3). Entonces,

$$\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0, v_0) = (0, 0)$$

y, debido al Lemma 2.14,  $(u_0, v_0) \gg (0, 0)$  y

$$0 = \sigma [\mathcal{A}(-\lambda_0\alpha + af(\cdot, u_0), -\lambda_0\gamma + bg(\cdot, v_0)), D]. \quad (2.4.13)$$

Derivando  $\mathfrak{F}$  con respecto a  $(u, v)$ , tenemos que, para cada  $u, v \in \mathcal{C}_0(\bar{D})$ ,

$$D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0, v_0) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - (-\Delta)^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_0\alpha u + \beta v - a \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u_0)u_0 u - af(\cdot, u_0)u \\ \delta u + \lambda_0\gamma v - b \frac{\partial g}{\partial v}(\cdot, v_0)v_0 v - bg(\cdot, v_0)v \end{pmatrix}$$

y, en particular,  $D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0, v_0)$  es un operador Fredholm de índice cero, puesto que es una perturbación compacta de la aplicación identidad. Además, es un isomorfismo topológico, por ser inyectivo. De hecho, sea  $u, v \in \mathcal{C}_0(\bar{D})$  tal que

$$\begin{aligned} 0 &= u - (-\Delta)^{-1} \left( \lambda_0\alpha u + \beta v - a \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u_0)u_0 u - af(\cdot, u_0)u \right), \\ 0 &= v - (-\Delta)^{-1} \left( \delta u + \lambda_0\gamma v - b \frac{\partial g}{\partial v}(\cdot, v_0)v_0 v - bg(\cdot, v_0)v \right). \end{aligned}$$

Entonces, por regularidad elíptica,  $u, v \in \mathcal{C}_0^{2+\mu}(\bar{D})$  y, sobre todo  $D$ , tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \left( -\Delta - \lambda_0\alpha + a \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u_0)u_0 + af(\cdot, u_0) \right) u - \beta v, \\ 0 &= \left( -\Delta - \lambda_0\gamma + b \frac{\partial g}{\partial v}(\cdot, v_0)v_0 + bg(\cdot, v_0) \right) v - \delta u. \end{aligned} \quad (2.4.14)$$

Por otro lado, debido a la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial, Proposición 1.3(a), tenemos que gracias a (2.4.13) y (B3)

$$\sigma \left[ \mathcal{A} \left( -\lambda_0\alpha + a \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u_0)u_0 + af(\cdot, u_0), -\lambda_0\gamma + b \frac{\partial g}{\partial v}(\cdot, v_0)v_0 + bg(\cdot, v_0) \right), D \right] > 0$$

y, por eso, (2.4.14) implica que  $(u, v) = (0, 0)$ . Por lo tanto,  $D_{(u,v)}\mathfrak{F}(\lambda_0, u_0, v_0)$  es un isomorfismo lineal topológico, y la unicidad de la solución positiva, como una consecuencia del Teorema 2.15, combinada con el Teorema de la Función Implícita nos muestra la regularidad de (2.4.9). Finalmente, derivando  $\mathfrak{F}(\lambda, \theta(\lambda)) = (0, 0)$ ,  $\Sigma[\lambda, D] < 0$ , con respecto a  $\lambda$  y poniendo  $\theta(\lambda) = (u_\lambda, v_\lambda)$  y

$$\mathcal{A}_\lambda := \mathcal{A} \left( -\lambda\alpha + a \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u_\lambda)u_\lambda + af(\cdot, u_\lambda), -\lambda\gamma + b \frac{\partial g}{\partial v}(\cdot, v_\lambda)v_\lambda + bg(\cdot, v_\lambda) \right),$$

obtenemos que

$$\mathcal{A}_\lambda \frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \theta(\lambda)$$

y, por consiguiente, de acuerdo con el Teorema 1.2,

$$\frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda) = \mathcal{A}_\lambda^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} \theta(\lambda) \gg (0, 0)$$

puesto que  $\sigma[\mathcal{A}_\lambda, D] > 0$ , lo que finaliza la demostración. Señalar que si  $\lambda > \mu > \lambda^*(D)$ , entonces  $\theta(\mu)$  es una subsolución estricta de (2.4.3) y, por lo tanto,  $\theta(\mu) \ll \theta(\lambda)$  gracias al Lema 2.13. ■

De acuerdo con el Teorema 2.15,

$$\lim_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, D, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) = (0, 0) \quad \text{si} \quad \lambda \leq \lambda^*(D),$$

mientras que

$$\lim_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, D, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) = \theta(\lambda) \quad \text{si} \quad \lambda > \lambda^*(D),$$

en total armonía con el *principio de intercambio de estabilidad* de Crandall y Rabinowitz [16]. Resumiendo, el Teorema 2.16 prueba que existe un único punto de bifurcación desde el cual una componente de estados de coexistencia emana desde la rama de soluciones triviales  $(\lambda, u, v) = (\lambda, 0, 0)$  en  $\lambda = \lambda^*(D)$ , denotada por  $\mathfrak{C}$ . El término componente se refiere a un subconjunto maximal cerrado y conexo, maximal en el sentido que no es un subconjunto propio de algún otro subconjunto cerrado y conexo del conjunto de soluciones no-triviales de (2.4.3) con  $M = N = 0$ .

### 2.4.2 Caso en que $(M, N) > (0, 0)$ y $\bar{D} \subset \Omega_+$

Así como se hizo para el contexto establecido para el Teorema 2.15, existe  $C_0 > 0$  tal que  $(C, C)$  es una supersolución de (2.4.3) para todo  $C \geq C_0$ . Por lo que, como una consecuencia directa del Teorema 2.11, obtendremos el siguiente resultado.

**Teorema 2.17** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3-4),  $\bar{D} \subset \Omega_+$ , y  $(M, N) > (0, 0)$ . Entonces, (2.4.3) posee un único estado de coexistencia, denotado por*

$$\theta_{[\lambda, D, M, N]}, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Además,

$$\lim_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, D, M, N]}(\cdot, t; u_0, v_0) = \theta_{[\lambda, D, M, N]} \quad (2.4.15)$$

en  $\mathcal{C}(\bar{D}) \times \mathcal{C}(\bar{D})$ , donde  $w_{[\lambda, D, M, N]} := (u, v)$  representa la única solución de (2.4.1).

Además, como una consecuencia directa del Lema 2.13, se obtiene el siguiente resultado de comparación.

**Lema 2.18** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3-4),  $\bar{D} \subset \Omega_+$ , y  $(M, N) > (0, 0)$ . Sea*

$$(\underline{u}, \underline{v}) > (0, 0) \quad (\text{resp. } (\bar{u}, \bar{v}) > (0, 0), \text{ con } \bar{u} > 0 \text{ y } \bar{v} > 0)$$

*una subsolución estricta (resp. supersolución) de (2.4.3). Entonces,*

$$(\underline{u}, \underline{v}) \ll \theta_{[\lambda, D, M, N]}, \quad (\text{resp. } \theta_{[\lambda, D, M, N]} \ll (\bar{u}, \bar{v})).$$

*Por consiguiente,  $(0, 0) < (M_1, N_1) \leq (M_2, N_2)$ ,  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , y  $M_2 - M_1 + N_2 - N_1 + \lambda_2 - \lambda_1 > 0$  implican que*

$$\theta_{[\lambda_1, D, M_1, N_1]} \ll \theta_{[\lambda_2, D, M_2, N_2]}.$$

*Además, para cada  $\lambda > \lambda^*(D)$ ,*

$$\theta_{[\lambda, D, 0, 0]} \ll \theta_{[\lambda, D, M, N]}.$$

Como consecuencia del Lema 2.18, el límite puntual

$$\theta_{[\lambda, D, \infty, \infty]} := \lim_{M, N \uparrow \infty} \theta_{[\lambda, D, M, N]} \quad \text{en } D \quad (2.4.16)$$

está bien definido, aunque podría ser infinito en alguna parte dentro de  $D$ . En la siguiente subsección veremos que, bajo la condición (B5), el límite puntual (2.4.16) es en realidad la solución minimal positiva de (2.4.4). El siguiente resultado muestra la *estabilidad estructural* de (2.4.1) bajo pequeñas perturbaciones de  $M, N \in [0, \infty)$  desde  $M = N = 0$ .

**Proposición 2.19** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3-4) y  $\bar{D} \subset \Omega_+$ . Entonces,*

$$\lim_{(M, N) \downarrow (0, 0)} \theta_{[\lambda, D, M, N]} = \begin{cases} 0, & \text{si } \lambda \leq \lambda^*(D), \\ \theta_{[\lambda, D, 0, 0]}, & \text{si } \lambda > \lambda^*(D). \end{cases}$$

**Demostración.** Por el Lema 2.18, el límite puntual

$$\Theta := \lim_{(M, N) \downarrow (0, 0)} \theta_{[\lambda, D, M, N]}$$

está bien definido. Además,  $\Theta$  es una solución clásica de (2.4.3) para  $M = N = 0$ . Necesariamente,  $\Theta \geq (0, 0)$ . De esta manera, de acuerdo con el Teorema 2.15,

$$\Theta = (0, 0) \quad \text{si } \lambda \leq \lambda^*(D).$$

Ahora, suponemos que  $\lambda > \lambda^*(D)$ . Entonces, por el Lema 2.18,

$$\theta_{[\lambda, D, 0, 0]} \leq \Theta$$

y, por lo tanto, por la unicidad del estado de coexistencia,  $\Theta = \theta_{[\lambda, D, 0, 0]}$ , lo que concluye la demostración. ■

### 2.4.3 Caso $M = N = \infty$ y $\bar{D} \subset \Omega_+$

El siguiente resultado muestra que el límite puntual (2.4.16) está bien definido en  $D$  suponiendo (B5). En realidad, la existencia de la solución larga minimal, denotada por  $L_{[\lambda, D]}^{\min}$  para el problema singular (2.4.4), resulta aparente.

**Proposición 2.20** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3-5),  $M = N = \infty$  y  $\bar{D} \subset \Omega_+$ . Entonces, para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , el límite (2.4.16) está bien definido y nos proporciona una solución minimal positiva de (2.4.4) en  $D$ . Dicho de otra manera,*

$$L_{[\lambda, D]}^{\min} = \lim_{M, N \uparrow \infty} \theta_{[\lambda, D, M, N]} \quad (= \theta_{[\lambda, D, \infty, \infty]}).$$

**Demostración.** A lo largo de la demostración la notación establecida en (2.4.8) va a ser utilizada. Sea  $(u, v)$  una solución positiva arbitraria de (2.1.6). Entonces, por (B4-B5),

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda \alpha u + \beta v - a f(\cdot, u) u \leq \max\{\lambda, 0\} \alpha_{U, \bar{D}} u + \beta_{U, \bar{D}} v - a_{L, \bar{D}} F(u) u \\ &\leq \max\{\lambda, 0\} \max\{\alpha_{U, \bar{D}}, \gamma_{U, \bar{D}}\} u + \max\{\beta_{U, \bar{D}}, \delta_{U, \bar{D}}\} v - \min\{a_{L, \bar{D}}, b_{L, \bar{D}}\} F(u) u. \end{aligned}$$

Similarmente,

$$-\Delta v \leq \max\{\lambda, 0\} \max\{\alpha_{U, \bar{D}}, \gamma_{U, \bar{D}}\} v + \max\{\beta_{U, \bar{D}}, \delta_{U, \bar{D}}\} u - \min\{a_{L, \bar{D}}, b_{L, \bar{D}}\} F(v) v.$$

Por lo tanto,  $(u, v)$  será una subsolución del sistema

$$\begin{cases} -\Delta u = \max\{\lambda, 0\} \Gamma u + \chi v - \Upsilon F(u) u \\ -\Delta v = \max\{\lambda, 0\} \Gamma v + \chi u - \Upsilon F(v) v \end{cases} \quad (2.4.17)$$

en  $D$ , donde hemos denotado

$$\Gamma := \max\{\alpha_{U, \bar{D}}, \gamma_{U, \bar{D}}\}, \quad \chi := \max\{\beta_{U, \bar{D}}, \delta_{U, \bar{D}}\}, \quad \Upsilon := \min\{a_{L, \bar{D}}, b_{L, \bar{D}}\}.$$

Por el Teorema 2.17, para cada  $P > 0$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ , (2.4.17) tiene una única solución  $(u, v)$  en  $D$  tal que

$$(u, v) = (P, P) \quad \text{en} \quad \partial D.$$

Debido a la unicidad, la simetría del problema implica que  $u = v = \Theta_P$ , donde  $\Theta_P$  es la única solución positiva de

$$-\Delta u = (\max\{\lambda, 0\} \Gamma + \chi) u - \Upsilon F(u) u \quad \text{en} \quad D, \quad u|_{\partial D} = P. \quad (2.4.18)$$

Por consiguiente, de acuerdo con el Lema 2.18, para cada  $M > 0$  y  $N > 0$ , tendremos que

$$\theta_{[\lambda, D, M, N]} \leq (\Theta_P, \Theta_P), \quad P \geq \max\{M, N\}.$$

De esta manera, debido a los resultados obtenidos para una única ecuación (ver [39], [46]), tendremos que

$$\theta_{[\lambda, D, M, N]} \ll (\Theta_\infty, \Theta_\infty), \quad (2.4.19)$$

donde  $\Theta_\infty$  representa la solución larga minimal de

$$-\Delta u = (\max\{\lambda, 0\}\Gamma + \chi)u - \Upsilon F(u)u$$

en  $D$ . Debido a (2.4.19), a través de un argumento standard de compacidad cuyos detalles técnicos omitimos aquí, resulta aparente que (2.4.16) es de hecho una solución positiva de (2.4.4).

Para finalizar la demostración debemos probar la minimalidad de  $L_{[\lambda, D]}^{\min}$ . Sea  $L$  una solución de (2.4.4) y, para  $n \geq 1$  suficientemente grande, denotamos como  $\bar{D}^n$  al conjunto abierto definido mediante (2.4.7). Para cada  $M > 0$  y  $N > 0$ , existen  $P > 0$ ,  $Q > 0$  y  $n \geq 1$  tal que

$$\theta_{[\lambda, D, M, N]} \leq (P, Q) \leq L \quad \text{en } D \setminus \bar{D}^n. \quad (2.4.20)$$

Por el Lema 2.18, la estimación (2.4.20) implica

$$\theta_{[\lambda, D, M, N]} \leq \theta_{[\lambda, D^n, P, Q]} \leq L \quad \text{en } D^n$$

y, por eso,

$$\theta_{[\lambda, D, M, N]} \leq L \quad \text{en } D.$$

Por lo tanto, pasando al límite cuando  $M, N \uparrow \infty$ , obtendremos

$$\theta_{[\lambda, D, \infty, \infty]} \leq L,$$

lo que concluye la demostración. ■

#### 2.4.4 Caso general cuando $M, N \in (0, \infty]$ y $D \subset \Omega_+$

El siguiente resultado extiende el Teorema 2.17 cubriendo el caso general cuando  $D \subset \Omega_+$ . En este caso,  $a(x)$  y  $b(x)$  podrían anularse en alguna porción de  $\partial D$ .

**Teorema 2.21** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3-4),  $D \subset \Omega_+$ , y  $(M, N) > (0, 0)$ . Entonces, para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , (2.4.3) tiene un único estado de coexistencia, denotado por  $\theta_{[\lambda, D, M, N]}$ . Además, (2.4.15) es obtenido.*

**Demostración.** A continuación, para  $n \geq n_0$  suficientemente grande, consideramos los subdominios  $D^n$  definidos mediante (2.4.7). Entonces, para cada  $n \geq n_0$ ,

$$\bar{D}^n \subset D^{n+1} \subset D \subset \Omega_+, \quad D = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} D^n, \quad (2.4.21)$$

y

$$a_{L,\bar{D}^n} := \min_{\bar{D}^n} a > 0, \quad b_{L,\bar{D}^n} := \min_{\bar{D}^n} b > 0. \quad (2.4.22)$$

Como  $\bar{D}^n \subset \Omega_+$ , para cada  $M, N \in [0, \infty)$  con  $M + N > 0$ , el Teorema 2.17 nos dice que

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - af(\cdot, u)u & \text{en } D^n, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - bg(\cdot, v)v & \text{en } D^n, \\ (u, v) = (M, N) & \text{en } \partial D^n, \end{cases}$$

posee un único estado de coexistencia. Lo denotaremos por

$$\theta_{[\lambda, D^n, M, N]}, \quad n \geq n_0.$$

Por la Proposición 2.20, para cada  $n \geq n_0$ , el límite puntual

$$\theta_{[\lambda, D^n, \infty, \infty]} := \lim_{M, N \uparrow \infty} \theta_{[\lambda, D^n, M, N]}$$

es finito en  $D^n$ , e igual a la solución minimal positiva del problema singular

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - af(\cdot, u)u & \text{en } D^n, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - bg(\cdot, v)v & \text{en } D^n, \\ (u, v) = (\infty, \infty) & \text{en } \partial D^n. \end{cases}$$

Además, de acuerdo con el Lema 2.18, para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $n \geq n_0$  y  $m \geq 1$ , tenemos que

$$\theta_{[\lambda, D^{n+m}, M, N]} \ll \theta_{[\lambda, D^{n+m}, \infty, \infty]} \ll \theta_{[\lambda, D^n, \infty, \infty]} \quad \text{en } D^n. \quad (2.4.23)$$

De esta manera, debido a (2.4.21), para cualquier subconjunto compacto dado  $K \subset D$  existe una constante  $C(K) > (0, 0)$  y un  $n_K \in \mathbb{N}$  tal que, para cada  $(M, N) > (0, 0)$  y  $n \geq n_K$ ,

$$\theta_{[\lambda, D^n, M, N]} \leq C(K) \quad \text{en } K. \quad (2.4.24)$$

Desde (2.4.24), y por un procedimiento diagonal standard, uno puede fácilmente concluir la existencia de un estado de coexistencia para (2.4.3), igualmente denotado por  $\theta_{[\lambda, D, M, N]}$ . Puesto que la solución positiva  $\theta_{[\lambda, D, M, N]}$  nos proporciona por ella misma con un supersolución de (2.4.3), las restantes afirmaciones del teorema pueden ser obtenidas directamente del Teorema 2.11. ■

Además, por el Lema 2.13, la siguiente contraparte del Lema 2.18 es obtenida.

**Lema 2.22** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3-4),  $D \subset \Omega_+$  y  $(M, N) > (0, 0)$ . Sea*

$$(\underline{u}, \underline{v}) > (0, 0) \quad (\text{resp. } (\bar{u}, \bar{v}) > (0, 0) \text{ con } \bar{u} > 0 \text{ y } \bar{v} > 0)$$

*una subsolución estricta (resp. supersolución) de (2.4.3). Entonces,*

$$(\underline{u}, \underline{v}) \ll \theta_{[\lambda, D, M, N]}, \quad (\text{resp. } \theta_{[\lambda, D, M, N]} \ll (\bar{u}, \bar{v})).$$

*Por consiguiente,  $(0, 0) < (M_1, N_1) \leq (M_2, N_2)$ ,  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , y*

$$M_2 - M_1 + N_2 - N_1 + \lambda_2 - \lambda_1 > 0$$

*implican que*

$$\theta_{[\lambda_1, D, M_1, N_1]} \ll \theta_{[\lambda_2, D, M_2, N_2]}.$$

Ahora, estamos en disposición de probar el principal resultado de existencia para el problema singular (2.4.4) en el caso general cuando  $D \subset \Omega_+$ . El Teorema 2.1 será una consecuencia directa de este tomando  $D = \Omega_+$ .

**Teorema 2.23** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3-5),  $D \subset \Omega_+$  y  $(M, N) > (0, 0)$ . Entonces, (2.4.4) tiene una solución positiva minimal y una maximal, denotadas por*

$$L_{[\lambda, D]}^{\min} \quad \text{y} \quad L_{[\lambda, D]}^{\max};$$

*en el sentido que cualquier otra solución positiva  $L$  de (2.4.4) satisface*

$$L_{[\lambda, D]}^{\min} \leq L \leq L_{[\lambda, D]}^{\max}.$$

*Además,*

$$L_{[\lambda, D]}^{\min} = \theta_{[\lambda, D, \infty, \infty]} := \lim_{M, N \uparrow \infty} \theta_{[\lambda, D, M, N]} \quad (2.4.25)$$

*y*

$$L_{[\lambda, D]}^{\max} = \lim_{n \uparrow \infty} \theta_{[\lambda, D^n, \infty, \infty]} = \lim_{n \uparrow \infty} L_{[\lambda, D^n]}^{\min} \quad (2.4.26)$$

*donde  $D^n$ ,  $n \geq 1$ , es el subdominio de  $D$  definido mediante (2.4.7).*

**Demostración.** Por el Lema 2.22, el límite puntual (2.4.25) estará bien definido. A continuación, mostraremos que además es finito. Tomamos  $x_0 \in D$  y  $R > 0$  tal que

$$\bar{B}_R(x_0) \subset D \subset \Omega_+,$$

y ponemos

$$(P_M, Q_N) := \max_{\partial B_R(x_0)} \theta_{[\lambda, D, M, N]}, \quad (M, N) > (0, 0).$$

De acuerdo con el Lema 2.22,

$$\theta_{[\lambda, D, M, N]} \ll \theta_{[\lambda, B_R(x_0), P_M+1, Q_N+1]} \quad \text{en} \quad B_R(x_0)$$



y, por lo tanto, tendremos que

$$\theta_{[\lambda,D,M,N]} \ll \theta_{[\lambda,B_R(x_0),\infty,\infty]} \quad \text{en } B_R(x_0),$$

para cada  $(M, N) > (0, 0)$ . Como este argumento es válido para cada  $x_0 \in D$  y, debido a la Proposición 2.20, el límite puntual  $\theta_{[\lambda,B_R(x_0),\infty,\infty]}$  es finito en  $B_R(x_0)$ , para cualquier subconjunto compacto dado  $K \subset D$  debe existir una constante  $C(K) > (0, 0)$  tal que

$$\theta_{[\lambda,D,M,N]} \leq C(K) \quad \text{in } K, \quad (M, N) > (0, 0).$$

Esto nos muestra que el límite puntual (2.4.25) es finito en  $D$ . Además, combinando la monotonía de esas sucesiones con la regularidad elíptica, resulta aparente que  $\theta_{[\lambda,D,\infty,\infty]}$  es una solución positiva de (2.4.4). En realidad, es la solución minimal positiva, puesto que si  $L$  es una solución positiva de (2.4.4), entonces, para cada  $(M, N) > (0, 0)$ , existen

$$(C_1, C_2) > (0, 0) \quad \text{y} \quad n \in \mathbb{N}$$

tal que,

$$\theta_{[\lambda,D,M,N]} \leq (C_1, C_2) \leq L \quad \text{en } D \setminus D^n. \quad (2.4.27)$$

Por el Lema 2.18, (2.4.27) implica que

$$\theta_{[\lambda,D,M,N]} \leq \theta_{[\lambda,D^n,C_1,C_2]} \leq L \quad \text{en } D^n,$$

y, por lo tanto,

$$\theta_{[\lambda,D,M,N]} \leq L$$

en todo  $D$ . Por consiguiente, pasando al límite cuando  $M, N \uparrow \infty$  tendremos que, de hecho

$$\theta_{[\lambda,D,\infty,\infty]} \leq L,$$

por lo que podemos concluir la demostración de la minimalidad de  $\theta_{[\lambda,D,\infty,\infty]}$ .

Similarmente, por (2.4.23) y (2.4.24), el límite puntual (2.4.26) está bien definido en  $D$  y nos proporciona con una solución positiva de (2.4.4). Sea  $L$  una solución positiva de (2.4.4). Entonces, para cada  $n \geq n_0$ , existe

$$(M, N) > (0, 0)$$

tal que  $L|_{D^n}$  será una subsolución positiva de (2.4.3) y, por lo tanto, gracias al Lema 2.18,

$$L \leq \theta_{[\lambda,D^n,M,N]} \leq \theta_{[\lambda,D^n,\infty,\infty]} \quad \text{en } D^n.$$

Pasando al límite cuando  $n \uparrow \infty$  obtendremos

$$L \leq L_{[\lambda,D]}^{\max}.$$

Esto concluye la demostración. ■

## 2.5 Demostraciones de los Teoremas 2.1, 2.2 y 2.3

El Teorema 2.1 es una consecuencia directa del Teorema 2.23.

En realidad, de acuerdo con el Teorema 2.23,

$$L_{[\lambda, \Omega_+]}^{\min} = \lim_{M, N \uparrow \infty} \theta_{[\lambda, \Omega_+, M, N]} \quad \text{para cada } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.5.1)$$

donde  $\theta_{[\lambda, \Omega_+, M, N]}$  representa la única solución positiva de (2.2.1) en  $D = \Omega_+$ . Además,

$$L_{[\lambda, \Omega_+]}^{\max} = \lim_{n \uparrow \infty} L_{[\lambda, \Omega_+^n]}^{\min} \quad (2.5.2)$$

donde, para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande,

$$\Omega_+^n := \{ x \in \Omega_+ : \text{dist}(x, \partial\Omega_+) > 1/n \}.$$

A continuación, caracterizaremos la existencia de los estados de coexistencia para el Teorema 2.3.

### 2.5.1 Caracterización de la existencia de los estados de coexistencia para el Teorema 2.3

Caracterizamos la existencia de las soluciones positivas de (2.1.5). Sea  $(u, v)$  una solución positiva de (2.1.5). Entonces, por el Lema 2.9,

$$(u, v) \gg (0, 0)$$

y

$$\sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\gamma + bg(\cdot, v)), \Omega] = 0. \quad (2.5.3)$$

De esta manera,

$$af(\cdot, u) > 0 \quad \text{y} \quad bg(\cdot, v) > 0, \quad \text{en } \Omega,$$

y, por eso, debido a la Proposición 1.3(a), (2.5.3) implica

$$0 = \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\gamma + bg(\cdot, v)), \Omega] > \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma), \Omega] = \Sigma[\lambda, \Omega].$$

Además, debido a la Proposición 1.3(c),

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\gamma + bg(\cdot, v)), \Omega] \\ &< \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\gamma + bg(\cdot, v)), \Omega_{0,1}] \\ &= \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma), \Omega_{0,1}] = \Sigma[\lambda, \Omega_{0,1}] \end{aligned}$$

ya que  $a = b = 0$  en  $\Omega_{0,1}$ . Por lo tanto, la condición

$$\Sigma[\lambda, \Omega] < 0 < \Sigma[\lambda, \Omega_{0,1}] \quad (2.5.4)$$

es de hecho una condición necesaria para la existencia de un estado de coexistencia de (2.1.5). Señalar que (2.5.4) puede ser expresada de forma equivalente mediante la expresión

$$\lambda^*(\Omega) < \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,1}).$$

Sea  $\lambda$  de forma que satisfaga (2.5.4). De acuerdo con el Teorema 2.11, para probar la existencia y la unicidad de un estado de coexistencia es suficiente construir una supersolución positiva. La construcción dada aquí se basa en López-Gómez [37], Fraile et al. [28] y Molina-Meyer [55].

Para cualquier  $j \in \{1, 2\}$  y  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, consideramos los  $\delta$ -entornos abiertos

$$\Omega_{\delta,j} := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega_{0,j}) < \delta\},$$

los cuales son representados en la Figura 2.3;  $\Omega_{\delta,1}$  consta de  $\Omega_{0,1}$ ,  $\Gamma_1$ , y el conjunto de puntos

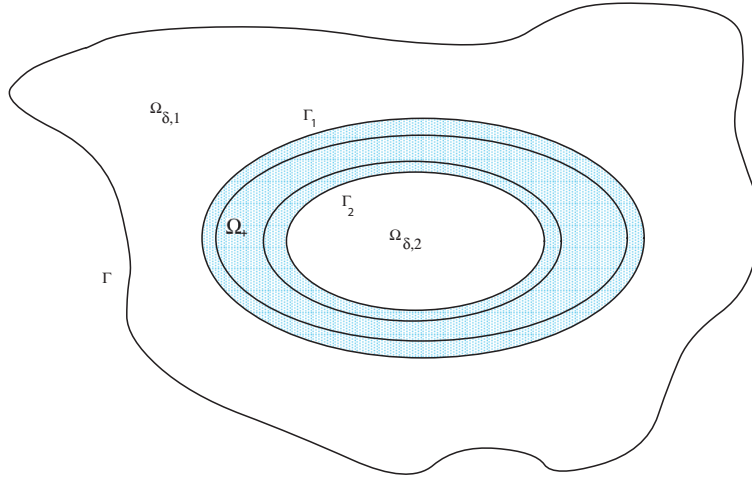


Figura 2.3:  $\delta$ -entornos de  $\Omega_{\delta,1}$  y  $\Omega_{\delta,2}$ .

$x \in \Omega_+$  tal que  $\text{dist}(x, \Gamma_1) < \delta$ . Similarmente,  $\Omega_{\delta,2}$  consta de  $\bar{\Omega}_{0,2}$  y el conjunto de  $x \in \Omega_+$  con  $\text{dist}(x, \Gamma_2) < \delta$ . Por la dependencia continua con respecto de los dominios,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \Sigma[\lambda, \Omega_{\delta,j}] = \Sigma[\lambda, \Omega_{0,j}], \quad j \in \{1, 2\},$$

(ver Molina-Meyer [55] y Amann [7]). Por lo tanto, para  $\delta > 0$  suficientemente pequeño,

$$\Sigma[\lambda, \Omega] < 0 < \Sigma[\lambda, \Omega_{\delta,1}] < \Sigma[\lambda, \Omega_{0,1}], \quad \Sigma[\lambda, \Omega] < \Sigma[\lambda, \Omega_{\delta,2}] < \Sigma[\lambda, \Omega_{0,2}]. \quad (2.5.5)$$

Fijando uno de estos valores de  $\delta$ , denotamos por

$$(\varphi_{\delta,j}, \psi_{\delta,j}) \gg (0, 0), \quad j \in \{1, 2\},$$

una autofunción principal asociada con  $\Sigma[\lambda, \Omega_{\delta,j}]$  —única salvo constantes multiplicativas. Entonces,

$$\mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma) \begin{pmatrix} \varphi_{\delta,j} \\ \psi_{\delta,j} \end{pmatrix} = \Sigma[\lambda, \Omega_{\delta,j}] \begin{pmatrix} \varphi_{\delta,j} \\ \psi_{\delta,j} \end{pmatrix} \quad \text{en } \Omega_{\delta,j}, \quad \varphi_{\delta,j} = \psi_{\delta,j} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_{\delta,j},$$

(ver (2.1.2), si es necesario). Ahora, consideramos

$$(\Phi, \Psi) := \begin{cases} (\varphi_{\delta,1}, \psi_{\delta,1}) & \text{en } \bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2},1} \\ (\varphi_{\delta,2}, \psi_{\delta,2}) & \text{en } \bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2},2} \\ (\varphi_+, \psi_+) & \text{en } \Omega_+^\delta := \Omega \setminus (\bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2},1} \cup \bar{\Omega}_{\frac{\delta}{2},2}) \end{cases}$$

donde  $(\varphi_+, \psi_+)$  es cualquier extensión suave, positiva y alejada de cero, de la función

$$(\varphi_{\delta,1}, \psi_{\delta,1}) \vee (\varphi_{\delta,2}, \psi_{\delta,2})$$

en

$$\Omega_+^\delta = \{x \in \Omega_+ : \text{dist}(x, \partial\Omega_+) > \delta/2\}.$$

Señalar que  $(\varphi_+, \psi_+)$  existe, puesto que  $(\varphi_{\delta,j}, \psi_{\delta,j})$  es positiva y alejada de cero en  $\Omega_+ \cap \partial\Omega_{\frac{\delta}{2},j}$ ,  $j \in \{1, 2\}$ . La Figura 2.4 muestra un perfil genuino de  $\Phi$  y/o  $\Psi$ .

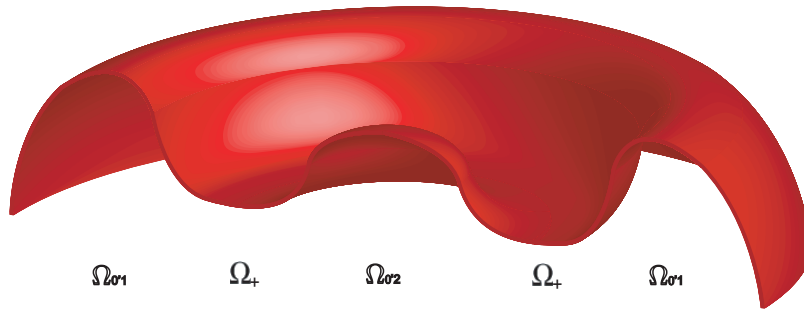


Figura 2.4: Perfil de los *elementos de la supersolución*  $\Phi, \Psi$ .

A continuación, mostraremos que  $(\bar{u}, \bar{v}) := (\kappa\Phi, \kappa\Psi)$  es una supersolución de (2.1.5) para  $\kappa > 1$  suficientemente grande. De hecho, por construcción,

$$(\kappa\Phi, \kappa\Psi) = (0, 0) \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Además, para cada  $j \in \{1, 2\}$ ,

$$\mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma) \begin{pmatrix} \kappa\Phi \\ \kappa\Psi \end{pmatrix} \geq - \begin{pmatrix} af(\cdot, \kappa\Phi) \kappa\Phi \\ bg(\cdot, \kappa\Psi) \kappa\Psi \end{pmatrix} \quad \text{en } \Omega_{\frac{\delta}{2},j},$$

sí, y sólo si,

$$\Sigma[\lambda, \Omega_{\delta,j}] \begin{pmatrix} \varphi_{\delta,j} \\ \psi_{\delta,j} \end{pmatrix} \geq - \begin{pmatrix} af(\cdot, \kappa\varphi_{\delta,j})\varphi_{\delta,j} \\ bg(\cdot, \kappa\psi_{\delta,j})\psi_{\delta,j} \end{pmatrix} \quad \text{en } \Omega_{\frac{\delta}{2},j},$$

que será cierto para cada  $\kappa > 0$ , ya que

$$\Sigma[\lambda, \Omega_{\delta,j}] > 0 \geq -af(\cdot, \kappa\varphi_{\delta,j}) \quad \text{y} \quad \Sigma[\lambda, \Omega_{\delta,j}] > 0 \geq -bg(\cdot, \kappa\psi_{\delta,j}) \quad \text{en } \Omega_{\delta,j}.$$

Señalar que, debido a (B2) y (2.5.5), para cada  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,1})$  tendremos que

$$\Sigma[\lambda, \Omega_{0,1}] > 0 \quad \text{y} \quad \Sigma[\lambda, \Omega_{0,2}] > 0.$$

Finalmente, diremos que

$$\mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma) \begin{pmatrix} \kappa\Phi \\ \kappa\Psi \end{pmatrix} \geq - \begin{pmatrix} af(\cdot, \kappa\Phi)\kappa\Phi \\ bg(\cdot, \kappa\Psi)\kappa\Psi \end{pmatrix} \quad \text{en } \Omega_+^\delta$$

sí, y sólo si, en todo  $\Omega_+^\delta$ , tenemos que

$$\frac{-\Delta\varphi_+ - \lambda\alpha\varphi_+ - \beta\psi_+}{\varphi_+} \geq -af(\cdot, \kappa\varphi_+), \quad \frac{-\Delta\psi_+ - \lambda\gamma\psi_+ - \delta\varphi_+}{\psi_+} \geq -bg(\cdot, \kappa\psi_+),$$

lo cual obtendremos que es cierto para  $\kappa > 1$  suficientemente grande, por (2.1.4), y puesto que  $a, b, \varphi_+$  y  $\psi_+$  son positivos y alejados de cero en  $\bar{\Omega}_+^\delta \subset \Omega$ . Por lo tanto,  $(\kappa\Phi, \kappa\Psi)$  será una supersolución de (2.1.5) para  $\kappa > 1$  suficientemente grande. Por consiguiente, por el Teorema 2.11, (2.1.5) posee una solución positiva sí, y sólo si, (2.5.4) es satisfecha. La denotaremos por

$$\theta(\lambda) := \theta_{[\lambda, \Omega, 0, 0]} = \theta_{[\lambda, \Omega]}.$$

### 2.5.2 Monotonía y comportamiento blow-up de $\theta(\lambda)$ en $\Omega_{0,1}$ cuando $\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})$

La demostración del Teorema 2.16 puede ser adaptada *mutatis mutandis* para probar que

$$\lambda \mapsto \theta(\lambda)$$

es suave y creciente, en el sentido que

$$\theta(\lambda) \ll \theta(\mu) \quad \text{si } \lambda^*(\Omega) < \lambda < \mu < \lambda^*(\Omega_{0,1}),$$

y que

$$\lim_{\lambda \downarrow \lambda^*(\Omega)} \theta(\lambda) = (0, 0).$$

El principal objetivo de esta subsección será mostrar que

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})} \theta(\lambda) = (\infty, \infty) \quad \text{uniformemente en subconjuntos compactos de } \Omega_{0,1}. \quad (2.5.6)$$

Sea  $(\varphi_{0,1}, \psi_{0,1}) \gg (0, 0)$  una autofunción principal asociada con

$$\Sigma[\lambda^*(\Omega_{0,1}), \Omega_{0,1}] = \sigma[\mathcal{A}(-\lambda^*(\Omega_{0,1})\alpha, -\lambda^*(\Omega_{0,1})\gamma), \Omega_{0,1}] = 0.$$

Tomamos  $\lambda_1 \in (\lambda^*(\Omega), \lambda^*(\Omega_{0,1}))$ . Entonces, ya que  $\theta(\lambda_1) \gg (0, 0)$ , existe  $\eta > 0$  tal que

$$\theta(\lambda) \geq \theta(\lambda_1) > \eta \begin{pmatrix} \varphi_{0,1} \\ \psi_{0,1} \end{pmatrix} \quad \text{en } \Omega_{0,1} \quad \text{para cada } \lambda \in [\lambda_1, \lambda^*(\Omega_{0,1})).$$

Por otro lado, derivando con respecto a  $\lambda$  la realización de (2.1.5) en

$$\theta(\lambda) := (\theta_1(\lambda), \theta_2(\lambda))$$

y reorganizando términos, obtendremos que

$$\begin{cases} (-\Delta + a \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, \theta_1(\lambda))\theta_1(\lambda) + a f(\cdot, \theta_1(\lambda)) - \lambda\alpha) \frac{d\theta_1}{d\lambda}(\lambda) - \beta \frac{d\theta_2}{d\lambda}(\lambda) = \alpha\theta_1(\lambda) \\ (-\Delta + b \frac{\partial g}{\partial v}(\cdot, \theta_2(\lambda))\theta_2(\lambda) + b g(\cdot, \theta_2(\lambda)) - \lambda\gamma) \frac{d\theta_2}{d\lambda}(\lambda) - \delta \frac{d\theta_1}{d\lambda}(\lambda) = \gamma\theta_2(\lambda) \\ (\frac{d\theta_1}{d\lambda}(\lambda), \frac{d\theta_2}{d\lambda}(\lambda)) = (0, 0) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{en } \Omega, \\ \\ \text{en } \partial\Omega. \end{array}$$

De esta manera, como  $a = b = 0$  en  $\Omega_{0,1}$ ,

$$\begin{cases} \mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma) \frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha\theta_1(\lambda) \\ \gamma\theta_2(\lambda) \end{pmatrix} > \eta \begin{pmatrix} \alpha\varphi_{0,1} \\ \gamma\psi_{0,1} \end{pmatrix} & \text{en } \Omega_{0,1}, \\ \frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda) > (0, 0) & \text{en } \partial\Omega_{0,1}. \end{cases}$$

Además,  $\Sigma[\lambda, \Omega_{0,1}] > 0$ , ya que  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,1})$ . Entonces, el Teorema 1.2 implica

$$\frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda) > \Psi(\lambda) \quad \text{en } \Omega_{0,1}, \quad \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda^*(\Omega_{0,1})), \quad (2.5.7)$$

donde  $\Psi(\lambda)$  representa la única solución de

$$\begin{cases} \mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma)\Psi(\lambda) = \eta \begin{pmatrix} \alpha\varphi_{0,1} \\ \gamma\psi_{0,1} \end{pmatrix} & \text{en } \Omega_{0,1}, \\ \Psi(\lambda) = (0, 0) & \text{en } \partial\Omega_{0,1}. \end{cases} \quad (2.5.8)$$

Por construcción,

$$\mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma) \begin{pmatrix} \varphi_{0,1} \\ \psi_{0,1} \end{pmatrix} = (\lambda^*(\Omega_{0,1}) - \lambda) \begin{pmatrix} \alpha\varphi_{0,1} \\ \gamma\psi_{0,1} \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto, la única solución de (2.5.8) viene dada a través de

$$\Psi(\lambda) = \frac{\eta}{\lambda^*(\Omega_{0,1}) - \lambda} \begin{pmatrix} \varphi_{0,1} \\ \psi_{0,1} \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente, debido a (2.5.7), obtenemos que

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})} \frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda) = (\infty, \infty) \quad \text{uniformemente en subconjuntos compactos de } \Omega_{0,1},$$

lo que concluye la demostración de (2.5.6). La finalización de la demostración de (2.2.3) es pospuesta hasta más adelante.

### 2.5.3 Problema auxiliar para la demostración del Teorema 2.2

Para llevar a cabo la demostración del Teorema 2.2 necesitaremos un resultado preliminar, el cual será el tema principal de esta subsección. A continuación, para  $(M, N) > (0, 0)$  dados, consideramos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - af(\cdot, u)u & \text{en } D, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - bg(\cdot, v)v & \text{en } D, \\ (u, v) = (M, N) & \text{en } \partial D, \end{cases} \quad (2.5.9)$$

donde

$$D := \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1} = \Omega_+ \cup \bar{\Omega}_{0,2}. \quad (2.5.10)$$

Señalar que  $\partial D = \Gamma_1$ . Entonces el siguiente resultado es satisfecho.

**Lema 2.24** *El problema (2.5.9) posee un estado de coexistencia sí, y sólo si*

$$\Sigma[\lambda, \Omega_{0,2}] > 0, \quad \text{i.e.,} \quad \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2}).$$

*Además, es único si existe y lo denotaremos por*

$$\theta_{[\lambda, D, M, N]},$$

*entonces:*

$$(a) \quad 0 \ll \theta_{[\lambda_1, D, M_1, N_1]} \ll \theta_{[\lambda_2, D, M_2, N_2]} \text{ si}$$

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda^*(\Omega_{0,2}), \quad (0, 0) < (M_1, N_1) \leq (M_2, N_2)$$

y

$$\lambda_2 - \lambda_1 + M_2 - M_1 + N_2 - N_1 > 0.$$

(b) *Si  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$  y  $(\underline{u}, \underline{v})$  (resp.  $(\bar{u}, \bar{v})$ ) es una subsolución positiva estricta (resp. supersolución) de (2.5.9), entonces*

$$(\underline{u}, \underline{v}) \ll \theta_{[\lambda, D, M, N]} \quad (\text{resp. } (\bar{u}, \bar{v}) \gg \theta_{[\lambda, D, M, N]}).$$

(c) *Si  $w_{[\lambda, D, M, N]} := (u, v)$  representa la única solución de*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - af(\cdot, u)u & \text{en } D \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - bg(\cdot, v)v & \text{en } D \times (0, \infty), \\ (u, v) = (M, N) & \text{en } \partial D \times (0, \infty), \\ (u(\cdot, 0), v(\cdot, 0)) = (u_0, v_0) > (0, 0) & \text{en } D, \end{cases} \quad (2.5.11)$$

*entonces,*

$$\lim_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, D, M, N]}(\cdot, t; u_0, v_0) = \theta_{[\lambda, D, M, N]} \quad \text{en } \mathcal{C}(\bar{D}) \times \mathcal{C}(\bar{D}).$$

**Demostración.** A continuación, para  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, consideramos el  $\delta$ -entorno de  $\Gamma_1$

$$\Gamma_{1,\delta} := \Gamma_1 + B_\delta(0) = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Gamma_1) < \delta\}$$

y el  $\delta$ -entorno abierto de  $D$

$$D_\delta := D \cup \Gamma_{1,\delta} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, D) < \delta\};$$

$\delta > 0$  debe ser elegido suficientemente pequeño de forma que  $\partial D_\delta \subset \Omega_{0,1}$  y

$$\Sigma[\lambda^*(\Omega_{0,2}), \Gamma_{1,\delta}] = \sigma[\mathcal{A}(-\lambda^*(\Omega_{0,2})\alpha, -\lambda^*(\Omega_{0,2})\gamma), \Gamma_{1,\delta}] > 0. \quad (2.5.12)$$

Es fácil ver, por la Sección 1.4 de esta Tesis, que

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sigma[\mathcal{A}(-\lambda^*(\Omega_{0,2})\alpha, -\lambda^*(\Omega_{0,2})\gamma), \Gamma_{1,\delta}] = \infty.$$

Sea  $(u, v) > (0, 0)$  una solución de (2.5.9). Por el Lema 2.9,

$$(u, v) \gg (0, 0).$$

Además, como  $(u, v)$  es una supersolución positiva estricta de  $\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\gamma + bg(\cdot, v))$  en  $D$  bajo condiciones de frontera Dirichlet homogéneas y  $\bar{\Omega}_{0,2} \subset D$ , debido al Teorema 1.2 y a la Proposición 1.3 obtendremos que

$$\begin{aligned} 0 &< \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\gamma + bg(\cdot, v)), D] \\ &< \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\gamma + bg(\cdot, v)), \Omega_{0,2}] = \Sigma[\lambda, \Omega_{0,2}], \end{aligned}$$

porque  $a = b = 0$  en  $\Omega_{0,2}$ . Por lo tanto,

$$\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$$

es necesario para la existencia.

Supongamos que  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ . Debido al Teorema 2.11 y al Lema 2.13, con el fin de completar la demostración del Lema 2.24 será suficiente construir una supersolución positiva para (2.5.9). Sea

$$(\varphi_{1,\delta}, \psi_{1,\delta}) \gg (0, 0)$$

una autofunción principal asociada a  $\Sigma[\lambda, \Gamma_{1,\delta}]$ . Ahora, consideramos

$$\Omega_{\delta,2} := \Omega_{0,2} + B_\delta(0) = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega_{0,2}) < \delta\}$$

y sea

$$(\varphi_{\delta,2}, \psi_{\delta,2}) \gg (0, 0)$$

una autofunción principal asociada a  $\Sigma[\lambda, \Omega_{\delta,2}]$ . Señalar que

$$\Sigma[\lambda, \Omega_{\delta,2}] < \Sigma[\lambda, \Omega_{0,2}].$$



Además,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \Sigma[\lambda, \Omega_{\delta,2}] = \Sigma[\lambda, \Omega_{0,2}].$$

De esta manera,  $\delta > 0$  puede hacerse tan pequeño como se quiera, si es necesario, de manera que

$$0 < \Sigma[\lambda, \Omega_{\delta,2}] < \Sigma[\lambda, \Omega_{0,2}]. \quad (2.5.13)$$

Finalmente, sea  $(\Phi, \Psi)$  la función definida por

$$(\Phi, \Psi) := \begin{cases} (\varphi_{1,\delta}, \psi_{1,\delta}) & \text{en } \Gamma_{1,\frac{\delta}{2}}, \\ (\varphi_{\delta,2}, \psi_{\delta,2}) & \text{en } \bar{\Omega}_{\delta/2,2}, \\ (\varphi_+, \psi_+) & \text{en } \Omega_+^\delta := \{x \in \Omega_+ : \text{dist}(x, \partial\Omega_+) > \delta/2\}, \end{cases}$$

donde  $(\varphi_+, \psi_+)$  sea cualquier extensión suave y positiva, alejada de cero, de

$$(\varphi_{1,\delta}, \psi_{1,\delta}) \vee (\varphi_{\delta,2}, \psi_{\delta,2})$$

a  $\Omega_+^\delta$ . Para  $\kappa > 1$  suficientemente grande, la función

$$(\bar{u}, \bar{v}) := (\kappa\Phi, \kappa\Psi)$$

será una supersolución positiva estricta de (2.5.9) en  $D$ . De hecho, por construcción,

$$(\bar{u}, \bar{v}) \gg (0, 0) \quad \text{y} \quad (\kappa\Phi, \kappa\Psi) > (M, N), \quad \text{en } \Gamma_1 = \partial D,$$

para  $\kappa > 1$  suficientemente grande, ya que

$$\min_{\Gamma_1} \varphi_{1,\delta} > 0 \quad \text{y} \quad \min_{\Gamma_1} \psi_{1,\delta} > 0.$$

Además, en el conjunto

$$\{x \in \Omega_+ : \text{dist}(x, \Gamma_1) \leq \delta/2\},$$

tendremos que

$$\begin{aligned} -\Delta(\kappa\Phi) &\geq \lambda\alpha\kappa\Phi + \beta\kappa\Psi - af(\cdot, \kappa\Phi)\kappa\Phi, \\ -\Delta(\kappa\Psi) &\geq \lambda\gamma\kappa\Psi + \delta\kappa\Phi - bg(\cdot, \kappa\Psi)\kappa\Psi, \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

sí, y sólo si,

$$\Sigma[\lambda, \Gamma_{1,\delta}] \geq -af(\cdot, \kappa\varphi_{1,\delta}), \quad \Sigma[\lambda, \Gamma_{1,\delta}] \geq -bg(\cdot, \kappa\psi_{1,\delta}),$$

lo cual será cierto, porque, por (2.5.12),

$$\Sigma[\lambda, \Gamma_{1,\delta}] > 0,$$

y, debido a las suposiciones sobre  $f$  y  $g$ ,

$$0 \geq -af(\cdot, \kappa\varphi_{1,\delta}) \quad \text{y} \quad 0 \geq -bg(\cdot, \kappa\psi_{1,\delta})$$

Similarmente, en  $\Omega_{\frac{\delta}{2},2}$ , (2.5.14) es obtenida sí, y sólo si,

$$\Sigma[\lambda, \Omega_{\frac{\delta}{2},2}] \geq -af(\cdot, \kappa\varphi_{2,\delta}), \quad \Sigma[\lambda, \Omega_{\frac{\delta}{2},2}] \geq -bg(\cdot, \kappa\psi_{2,\delta}),$$

lo cual es de hecho cierto, por (2.5.13). Finalmente, en  $\Omega_+^\delta$ , (2.5.14) es satisfecha sí, y sólo si,

$$\frac{-\Delta\varphi_- - \lambda\alpha\varphi_- - \beta\psi_-}{\varphi_-} \geq -af(\cdot, \kappa\varphi_-), \quad \frac{-\Delta\psi_- - \lambda\gamma\psi_- - \delta\varphi_-}{\psi_-} \geq -bg(\cdot, \kappa\psi_-),$$

algo que es obtenido eligiendo  $\kappa$  suficientemente grande. Esto concluye la demostración. ■

#### 2.5.4 Existencia de soluciones grandes en el Teorema 2.2

Supongamos  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ . Entonces, por el Lema 2.24, el límite puntual

$$\theta_{[\lambda,D,\infty,\infty]} := \lim_{M,N \uparrow \infty} \theta_{[\lambda,D,M,N]} \quad (2.5.15)$$

está bien definido en  $D$ . Además, es finito en todas partes. De hecho, sea

$$(P, Q) > (M, N)$$

un constante tal que

$$\theta_{[\lambda,D,M,N]} < (P, Q) \quad \text{en } \partial\Omega_+.$$

Entonces, la restricción  $\theta_{[\lambda,D,M,N]}|_{\Omega_+}$  será una subsolución positiva estricta de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\alpha u + \beta v - af(\cdot, u)u & \text{en } \Omega_+, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda\gamma v - bg(\cdot, v)v & \text{en } \Omega_+, \\ (u, v) = (P, Q) & \text{en } \partial\Omega_+. \end{cases}$$

De esta manera, por el Lema 2.22 y el Teorema 2.23,

$$\theta_{[\lambda,D,M,N]} \leq \theta_{[\lambda,\Omega_+,P,Q]} \ll L_{[\lambda,\Omega_+]}^{\min} \quad \text{en } \Omega_+,$$

y, por lo tanto, pasando al límite cuando  $M, N \uparrow \infty$ , obtenomos que

$$\theta_{[\lambda,D,\infty,\infty]} \leq L_{[\lambda,\Omega_+]}^{\min} \quad \text{en } \Omega_+. \quad (2.5.16)$$

Por consiguiente, (2.5.15) es finito en  $\Omega_+$ . El que sea finito en  $\bar{\Omega}_{0,2}$  se desprende de la siguiente contraparte del Lema 2.24.

**Lema 2.25** *Supongamos que  $f, g$  satisfacen (B3-4),  $D := \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}$ , y, dado un  $n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, sea*

$$D^n := \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) > 1/n\}, \quad n \geq n_0.$$

*Para cualquier  $n \geq n_0$  y  $(M, N) > (0, 0)$ , consideramos el problema de valores de contorno*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - af(\cdot, u)u & \text{en } D^n, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - bg(\cdot, v)v & \text{en } \partial D^n, \\ (u, v) = (M, N) & \end{cases} \quad (2.5.17)$$

*Entonces, (2.5.17) posee una solución positiva sí, y sólo si,*

$$\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2}), \quad \text{i.e.,} \quad \Sigma[\lambda, \Omega_{0,2}] > 0.$$

*Además, es única si existe y la denotamos por*

$$\theta_{[\lambda, D^n, M, N]},$$

*entonces, para cada  $n \geq n_0$ , las siguientes propiedades son satisfechas:*

(a)  $0 \ll \theta_{[\lambda_1, D^n, M_1, N_1]} \ll \theta_{[\lambda_2, D^n, M_2, N_2]}$  si

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda^*(\Omega_{0,2}), \quad (0, 0) < (M_1, N_1) \leq (M_2, N_2),$$

y

$$\lambda_2 - \lambda_1 + M_2 - M_1 + N_2 - N_1 > 0.$$

(b) Si  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$  y  $(\underline{u}, \underline{v})$  (resp.  $(\bar{u}, \bar{v})$ ) es una subsolución positiva estricta (resp. supersolución) de (2.5.17), entonces

$$(\underline{u}, \underline{v}) \ll \theta_{[\lambda, D^n, M, N]} \quad (\text{resp. } (\bar{u}, \bar{v}) \gg \theta_{[\lambda, D^n, M, N]}).$$

(c) Si

$$w_{[\lambda, D^n, M, N]} := (u, v)$$

*representa la única solución de*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - af(\cdot, u)u & \text{en } D^n \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - bg(\cdot, v)v & \text{en } \partial D^n \times (0, \infty), \\ (u, v) = (M, N) & \text{en } D^n, \\ (u(\cdot, 0), v(\cdot, 0)) = (u_0, v_0) > (0, 0) & \end{cases}$$

*entonces,*

$$\lim_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, D^n, M, N]}(\cdot, t; u_0, v_0) = \theta_{[\lambda, D^n, M, N]} \quad \text{en } \mathcal{C}(\bar{D}) \times \mathcal{C}(\bar{D}).$$

La demostración del Lema 2.25 será más sencilla que la realizada para el Lema 2.24, puesto que ahora  $a$  y  $b$  permanecerán positivos y alejados de cero en  $\partial D^n$ , lo cual simplifica la construcción de la supersolución  $(\Phi, \Psi)$ . Por consiguiente, los detalles técnicos son omitidos aquí.

Ahora, fijamos  $n \geq n_0$ . Como  $\partial D^n$  es un subconjunto compacto de  $\Omega_+$ , por (2.5.16), existe

$$C(n) := (C_1(n), C_2(n)) > (0, 0),$$

tal que,

$$\theta_{[\lambda, D, M, N]} \leq C(n), \quad \text{en } \partial D^n,$$

para cada  $(M, N) > (0, 0)$ . Por consiguiente, debido al Lema 2.25,

$$\theta_{[\lambda, D, M, N]} \leq \theta_{[\lambda, D^n, C_1(n), C_2(n)]} \quad \text{en } D^n$$

para cada  $(M, N) > (0, 0)$ , y, por lo tanto,  $\theta_{[\lambda, D, \infty, \infty]}$  es finito en  $D^n$ . Como este argumento es válido para cualquier  $n \geq n_0$  y

$$D = \bigcup_{n \geq n_0} D^n,$$

necesariamente  $\theta_{[\lambda, D, \infty, \infty]}$  es finito en todo el dominio  $D$ . Claramente, este argumento puede ser fácilmente adaptado para concluir que

$$\theta_{[\lambda, D^n, \infty, \infty]} := \lim_{M, N \uparrow \infty} \theta_{[\lambda, D^n, M, N]} \quad (2.5.18)$$

esté bien definido y sea finito en  $D^n$  para cada  $n \geq n_0$ . Ahora, por un argumento standard, es fácil ver que

$$\theta_{[\lambda, D, \infty, \infty]} \in \mathcal{C}^{2+\mu}(D) \times \mathcal{C}^{2+\mu}(D)$$

será una solución positiva de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - a f(\cdot, u)u & \text{en } D, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - b g(\cdot, v)v & \text{en } D, \\ (u, v) = (\infty, \infty) & \text{en } \partial D. \end{cases} \quad (2.5.19)$$

Esto prueba que en realidad  $\theta_{[\lambda, D, \infty, \infty]}$  es la solución positiva minimal de (2.5.19). De hecho, sea  $L$  una solución positiva de (2.5.19). Entonces, para cada  $(M, N) > (0, 0)$ , existen

$$C := (C_1, C_2) > (0, 0) \quad \text{y} \quad n \geq n_0$$

tal que

$$\theta_{[\lambda, D, M, N]} \leq C \leq L \quad \text{en } D \setminus \bar{D}^n. \quad (2.5.20)$$

Entonces, debido al Lema 2.25, (2.5.20) implica

$$\theta_{[\lambda, D, M, N]} \leq \theta_{[\lambda, D^n, C_1, C_2]} \leq L \quad \text{en } D^n,$$

y, por consiguiente,

$$\theta_{[\lambda,D,M,N]} \leq L \quad \text{en } D,$$

para todo  $(M, N) > (0, 0)$ . Por lo tanto, pasando al límite cuando  $M, N \uparrow \infty$  obtenemos

$$\theta_{[\lambda,D,\infty,\infty]} \leq L,$$

lo cual nos muestra su minimalidad entre todas las soluciones grandes. Esto muestra la existencia de  $L_{[\lambda,D]}^{\min}$  en el Teorema 2.2. Similarmente, para cualquier  $n \geq n_0$ , el límite puntual (2.5.18) nos proporciona la solución minimal positiva de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - a f(\cdot, u)u & \text{en } D^n, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - b g(\cdot, v)v & \\ (u, v) = (\infty, \infty) & \text{en } \partial D^n, \end{cases}$$

al que de ahora en adelante denotaremos mediante  $L_{[\lambda,D^n]}^{\min}$ . A continuación, probaremos que

$$L_{[\lambda,D]}^{\max} := \lim_{n \uparrow \infty} L_{[\lambda,D^n]}^{\min} \quad (2.5.21)$$

está bien definido y que nos proporcionará una solución maximal de (2.5.19). De hecho, para cada  $(M, N) > (0, 0)$ ,  $n \geq n_0$  y  $m \geq 1$ , tenemos que

$$\theta_{[\lambda,D^{n+m},M,N]} \leq \theta_{[\lambda,D^{n+m},\infty,\infty]} \leq \theta_{[\lambda,D^n,\infty,\infty]} \quad \text{en } D^n.$$

De esta manera, para cada subconjunto compacto  $K \subset D$  existen

$$C(K) > (0, 0) \quad \text{y} \quad n_K \in \mathbb{N}$$

tal que

$$\theta_{[\lambda,D^n,M,N]} \leq C(K) \quad \text{en } K$$

para cada  $(M, N) > (0, 0)$  y  $n \geq n_K$ , y, por eso,

$$L_{[\lambda,D^n]}^{\min} = \lim_{M,N \uparrow \infty} \theta_{[\lambda,D^n,M,N]} \leq C(K) \quad \text{en } K.$$

A partir de estas estimaciones a priori, por un proceso diagonal de compacidad, llegaremos a que (2.5.21) es finito en  $D$  y que en realidad será una solución de (2.5.19). Para mostrar su maximalidad entre todas las soluciones grandes, sea  $L$  un solución positiva de (2.5.19). Para cada  $n \geq n_0$ , existe

$$(M, N) > (0, 0),$$

tal que  $L|_{D^n}$  sea una subsolución positiva de (2.5.17) y, por lo tanto, gracias al Lema 2.25,

$$L \leq \theta_{[\lambda,D^n,M,N]} \leq \theta_{[\lambda,D^n,\infty,\infty]} = L_{[\lambda,D^n]}^{\min} \quad \text{en } D^n.$$

Por consiguiente, pasando al límite cuando  $n \uparrow \infty$  llegamos a que

$$L \leq L_{[\lambda, D]}^{\max},$$

lo que concluye la demostración de su maximalidad.

Para finalizar la demostración de la existencia en Teorema 2.2 debemos probar que  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$  si (2.5.19) posee una solución positiva. De hecho, sea  $L := (L_1, L_2)$  una solución positiva de (2.5.19) para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Para cada  $n \geq n_0$ ,  $L|_{D^n}$  será una supersolución positiva estricta de  $\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, L_1), -\lambda\gamma + bg(\cdot, L_2))$  en  $D^n$  bajo condiciones de frontera Dirichlet homogéneas y, por eso, de acuerdo con el Teorema 1.2,

$$\sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, L_1), -\lambda\gamma + bg(\cdot, L_2)), D^n] > 0.$$

Por lo tanto, puesto que  $\bar{\Omega}_{0,2} \subset D^n$ ,

$$\begin{aligned} 0 &< \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, L_1), -\lambda\gamma + bg(\cdot, L_2)), D^n] \\ &< \sigma[\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, L_1), -\lambda\gamma + bg(\cdot, L_2)), \Omega_{0,2}] = \Sigma[\lambda, \Omega_{0,2}], \end{aligned}$$

porque  $a = b = 0$  en  $\Omega_{0,2}$ . Por consiguiente,  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ .

### 2.5.5 Comportamiento blow-up de $L_{[\lambda, D]}^{\min}$ en $\Omega_{0,2}$ cuando $\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,2})$

Esta subsección prueba que

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,2})} L_{[\lambda, D]}^{\min} = (\infty, \infty) \quad \text{uniformemente en subconjuntos compactos de } \Omega_{0,2}. \quad (2.5.22)$$

Esta propiedad se desprende del siguiente lema, el cual extiende los resultados de las Secciones 2.5.1, 2.5.2, para cubrir el caso cuando  $\Omega$  es intercambiado por  $D = \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}$ .

**Lema 2.26** *Consideramos el problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\alpha u + \beta v - af(\cdot, u)u & \text{en } D, \\ -\Delta v = \delta u + \lambda\gamma v - bg(\cdot, v)v & \text{en } D, \\ (u, v) = (0, 0) & \text{en } \partial D, \end{cases} \quad (2.5.23)$$

con  $D = \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}$ . Entonces, (2.5.23) posee una solución positiva sí, y sólo si,

$$\Sigma[\lambda, D] < 0 < \Sigma[\lambda, \Omega_{0,2}], \quad (2.5.24)$$

i.e,  $\lambda^*(D) < \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ . Además, es única si existe y la denotamos mediante

$$\theta_{[\lambda, D]},$$

entonces la aplicación

$$\begin{aligned} (\lambda^*(D), \lambda^*(\Omega_{0,2})) &\xrightarrow{\theta} \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \\ \lambda &\mapsto \theta(\lambda) := \theta_{[\lambda, D]} \end{aligned} \quad (2.5.25)$$

es creciente puntualmente y de clase  $\mathcal{C}^1$ . Por otro lado,

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,2})} \theta_{[\lambda, D]} = (\infty, \infty) \quad \text{uniformemente en subconjuntos compactos de } \Omega_{0,2}. \quad (2.5.26)$$

**Demostración.** Supongamos que  $(u, v) > (0, 0)$  resuelve (2.5.23). Por el Lema 2.9,  $(u, v) \gg (0, 0)$  y

$$\sigma [\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\alpha + bg(\cdot, v)), D] = 0.$$

De esta manera, puesto que  $a = b = 0$  en  $\Omega_{0,2}$ , llegamos a que

$$\begin{aligned} \Sigma[\lambda, D] &< \sigma [\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u) - \lambda\alpha + bg(\cdot, v)), D] = 0 \\ &< \sigma [\mathcal{A}(-\lambda\alpha + af(\cdot, u), -\lambda\alpha + bg(\cdot, v)), \Omega_{0,2}] = \Sigma[\lambda, \Omega_{0,2}], \end{aligned}$$

y, por eso, (2.5.24) es una condición necesaria para la existencia de una solución positiva. A la inversa, supongamos que

$$\lambda \in (\lambda^*(D), \lambda^*(\Omega_{0,2})).$$

Entonces, por el Lema 2.24, el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\alpha u + \beta v - af(\cdot, u)u \\ -\Delta v = \delta u + \lambda\gamma v - bg(\cdot, v)v \\ (u, v) = (1, 1) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{en } D, \\ \\ \text{en } \partial D, \end{array}$$

posee una única solución positiva, que hemos denotado por

$$(\theta_{[\lambda, D, 1, 1]}).$$

Claramente,  $\theta_{[\lambda, D, 1, 1]}$  es una supersolución positiva de (2.5.23) y, por consiguiente, debido al Teorema 2.11 y al Lema 2.13, (2.5.23) tiene una única solución positiva. La regularidad de la aplicación (2.5.25) se obtiene adaptando *mutatis mutandis* la demostración para la regularidad de (2.4.9). Por lo que, la omitiremos. La prueba de (2.5.26) puede ser obtenida adaptando la demostración de (2.5.6). Sea

$$(\varphi_{0,2}, \psi_{0,2}) \gg (0, 0)$$

una autofunción principal asociada con

$$\Sigma[\lambda^*(\Omega_{0,2}), \Omega_{0,2}] = \sigma[\mathcal{A}(-\lambda^*(\Omega_{0,2})\alpha, -\lambda^*(\Omega_{0,2})\gamma), \Omega_{0,2}] = 0$$

y tomamos

$$\lambda_2 \in (\lambda^*(D), \lambda^*(\Omega_{0,2})).$$

Entonces, puesto que

$$\theta(\lambda_2) \gg (0, 0),$$

existe  $\eta > 0$  tal que, para cada  $\lambda \in [\lambda_2, \lambda^*(\Omega_{0,2}))$ ,

$$\theta(\lambda) \geq \theta(\lambda_2) > \eta \begin{pmatrix} \varphi_{0,2} \\ \psi_{0,2} \end{pmatrix} \quad \text{en } \Omega_{0,2}.$$

Por otro lado, derivando con respecto a  $\lambda$  la realización de (2.5.23) particularizada en

$$\theta(\lambda) := (\theta_1(\lambda), \theta_2(\lambda))$$

y reorganizando términos llegamos a que

$$\begin{cases} (-\Delta + a \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, \theta_1(\lambda)) \theta_1(\lambda) + a f(\cdot, \theta_1(\lambda)) - \lambda \alpha) \frac{d\theta_1}{d\lambda}(\lambda) - \beta \frac{d\theta_2}{d\lambda}(\lambda) = \alpha \theta_1(\lambda) \\ (-\Delta + b \frac{\partial g}{\partial v}(\cdot, \theta_2(\lambda)) \theta_2(\lambda) + b g(\cdot, \theta_2(\lambda)) - \lambda \gamma) \frac{d\theta_2}{d\lambda}(\lambda) - \delta \frac{d\theta_1}{d\lambda}(\lambda) = \gamma \theta_2(\lambda) \\ (\frac{d\theta_1}{d\lambda}(\lambda), \frac{d\theta_2}{d\lambda}(\lambda)) = (0, 0) \end{cases} \begin{array}{l} \text{en } D, \\ \\ \text{en } \partial D. \end{array}$$

De esta manera, como  $a = b = 0$  en  $\Omega_{0,2}$ , obtenemos

$$\begin{cases} \mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma) \frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda) = \begin{pmatrix} \alpha\theta_1(\lambda) \\ \gamma\theta_2(\lambda) \end{pmatrix} > \eta \begin{pmatrix} \alpha\varphi_{0,2} \\ \gamma\psi_{0,2} \end{pmatrix} & \text{en } \Omega_{0,2}, \\ \frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda) > (0, 0) & \text{en } \partial\Omega_{0,2}, \end{cases}$$

Además,  $\Sigma[\lambda, \Omega_{0,2}] > 0$ , ya que  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ , y, por eso, de acuerdo con el Teorema 1.2,

$$\frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda) > \Psi(\lambda) \quad \text{en } \Omega_{0,2}, \quad \forall \lambda \in [\lambda_2, \lambda^*(\Omega_{0,2})) ,$$

donde  $\Psi(\lambda)$  representa la única solución de

$$\begin{cases} \mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma) \Psi(\lambda) = \eta \begin{pmatrix} \alpha\varphi_{0,2} \\ \gamma\psi_{0,2} \end{pmatrix} & \text{en } \Omega_{0,2}, \\ \Psi(\lambda) = (0, 0) & \text{en } \partial\Omega_{0,2}. \end{cases}$$

Por construcción,

$$\mathcal{A}(-\lambda\alpha, -\lambda\gamma) \begin{pmatrix} \varphi_{0,2} \\ \psi_{0,2} \end{pmatrix} = (\lambda^*(\Omega_{0,2}) - \lambda) \begin{pmatrix} \alpha\varphi_{0,2} \\ \gamma\psi_{0,2} \end{pmatrix}$$

y, por lo tanto,

$$\Psi(\lambda) = \frac{\eta}{\lambda^*(\Omega_{0,2}) - \lambda} \begin{pmatrix} \varphi_{0,2} \\ \psi_{0,2} \end{pmatrix}.$$

Esto prueba (2.5.26) fácilmente. ■

Ahora, podemos probar (2.5.22). Por el Lema 2.24, para cada

$$(M, N) > (0, 0) \quad \text{y} \quad \lambda < \mu < \lambda^*(\Omega_{0,2}),$$

tendremos que

$$\theta_{[\lambda, D, M, N]} \ll \theta_{[\mu, D, M, N]},$$

y, por eso, pasando al límite cuando  $M, N \uparrow \infty$  llegamos a que

$$L_{[\lambda, D]}^{\min} \leq L_{[\mu, D]}^{\min}.$$



Por lo tanto, el límite puntual

$$L_{\lambda^*(\Omega_{0,2})} := \lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,2})} L_{[\lambda, D]}^{\min} \quad (2.5.27)$$

está bien definido en  $\bar{D}$ . Por otro lado, para cada  $(M, N) > (0, 0)$ , tendremos que

$$L_{[\lambda, D]}^{\min} \gg \theta_{[\lambda, D, M, N]} \gg \theta_{[\lambda, D]}.$$

Por consiguiente, (2.5.22) se obtiene en realidad a partir de (2.5.26). Señalar que, en particular,

$$L_{\lambda^*(\Omega_{0,2})} = (\infty, \infty), \quad \text{en } \Omega_{0,2}.$$

### 2.5.6 Conclusión de la demostración del Teorema 2.3

Según lo demostrado hasta el momento, nos queda únicamente por demostrar (2.2.3). A continuación, denotamos

$$D := \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}$$

y, para cualquier  $n \geq n_0$ , consideramos los conjuntos abiertos  $D^n$  definidos en el Lema 2.25. Por el Lema 2.25, para cada  $(M, N) > (0, 0)$ ,

$$\theta_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}), D^n, M, N]}$$

está bien definido, para  $\lambda^*(\Omega_{0,1}) < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ , por (B2). Fijamos  $n \geq n_0$  y

$$\lambda \in (\lambda^*(\Omega), \lambda^*(\Omega_{0,1})),$$

y ponemos

$$(M, N) := \max_{\partial D^n} \theta_{[\lambda, \Omega]}$$

para cada componente. Entonces,

$$\theta_{[\lambda, \Omega]} \leq (M, N)$$

en  $\partial D^n$  y, por tanto, por el Lema 2.25 tendremos que

$$\theta_{[\lambda, \Omega]} \leq \theta_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}), D^n, M, N]} \quad \text{en } D^n.$$

De esta manera,

$$\theta_{[\lambda, \Omega]} \leq L_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}), D^n]}^{\min} = \lim_{M, N \uparrow \infty} \theta_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}), D^n, M, N]} \quad \text{en } D^n. \quad (2.5.28)$$

Como la aplicación

$$\lambda \mapsto \theta_{[\lambda, \Omega]}$$

es creciente y (2.5.28) se tiene para cada  $\lambda \in (\lambda^*(\Omega), \lambda^*(\Omega_{0,1}))$  y  $n \geq n_0$ , el límite puntual

$$L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})} := \lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})} \theta_{[\lambda, \Omega]} \quad \text{en } D \quad (2.5.29)$$

está bien definido y es finito. Como siempre,

$$L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})} \in \mathcal{C}^{2+\mu}(D) \times \mathcal{C}^{2+\mu}(D)$$

y resuelve (2.1.6) en  $D$ . Para completar la demostración del Teorema 2.3 debemos probar que

$$L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})} = L_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}), D]}^{\min}.$$

Para poder realizarlo será suficiente estar seguro que

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})} \left( \min_{\partial D} u_{[\lambda, \Omega]}, \min_{\partial D} v_{[\lambda, \Omega]} \right) = (\infty, \infty), \quad (u_{[\lambda, \Omega]}, v_{[\lambda, \Omega]}) := \theta_{[\lambda, \Omega]}. \quad (2.5.30)$$

De hecho, supongamos (2.5.30). Entonces, poniendo

$$(m_\lambda, n_\lambda) := \left( \min_{\partial D} u_{[\lambda, \Omega]}, \min_{\partial D} v_{[\lambda, \Omega]} \right), \quad \lambda \in (\lambda^*(\Omega), \lambda^*(\Omega_{0,1})),$$

del Lema 2.24 llegamos a que

$$\theta_{[\lambda, \Omega]} \geq \theta_{[\lambda, D, m_\lambda, n_\lambda]} \quad \text{en } D$$

y, en particular, para cada  $\varepsilon > 0$  y

$$\lambda \in (\lambda^*(\Omega_{0,1}) - \varepsilon, \lambda^*(\Omega_{0,1})),$$

obtenemos que

$$\theta_{[\lambda, \Omega]} \geq \theta_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}) - \varepsilon, D, m_\lambda, n_\lambda]}, \quad \text{en } D.$$

De esta manera, pasando al límite cuando  $\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})$ , (2.5.29) implica que

$$L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})} \geq L_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}) - \varepsilon, D]}^{\min} \quad \text{en } D$$

para cada  $\varepsilon > 0$ , y, en particular,  $L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})}$  resuelve (2.5.19), ya que sabemos que resuelve (2.1.6) en  $D$ . Similarmente,

$$\theta_{[\lambda, \Omega]} \leq \theta_{[\lambda, D, \max_{\partial D} u_{[\lambda, \Omega]}, \max_{\partial D} v_{[\lambda, \Omega]}]} \leq L_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}), D]}^{\min} \quad \text{en } D$$

y, por lo tanto,

$$L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})} \leq L_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}), D]}^{\min} \quad \text{en } D.$$

Por consiguiente,

$$L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})} = L_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}), D]}^{\min}, \quad \text{en } D.$$

lo que probaría el Teorema 2.3, puesto que (2.5.6) y (2.5.30) implican

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})} \theta_{[\lambda, \Omega]} = (\infty, \infty) \quad \text{en } \bar{\Omega}_{0,1} \setminus \partial\Omega$$

y, por eso,  $1/\theta_{[\lambda, \Omega]}$ ,  $\lambda \in (\lambda^*(\Omega), \lambda^*(\Omega_{0,1}))$ , será una familia de funciones continuas decrecientes que se aproximan a cero puntualmente en  $\bar{\Omega}_{0,1} \setminus \partial\Omega$ ; por lo tanto, estas funciones se aproximan a cero uniformemente en subconjuntos compactos de  $\bar{\Omega}_{0,1} \setminus \partial\Omega$ . Por consiguiente,

$$\theta_{[\lambda, \Omega]} \longrightarrow (\infty, \infty), \quad \text{cuando } \lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1}),$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\bar{\Omega}_{0,1} \setminus \partial\Omega$ , lo que finaliza la demostración del Teorema 2.3. Por lo que, para completar la demostración del Teorema 2.3, es suficiente probar (2.5.30). Nuestra prueba de (2.5.30) está basada en la demostración del lemma de la frontera de Hopf mostrado en Protter y Weinberger [57], y en Du y Huang [25], y sigue un argumento por contradicción. Supongamos que (2.5.30) es falso. Entonces, poniendo

$$\left( L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})}^u, L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})}^v \right) := L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})},$$

tendremos que

$$\min_{\partial D} L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})}^u \in (0, \infty), \quad \text{o} \quad \min_{\partial D} L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})}^v \in (0, \infty).$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$b := \min_{\partial D} L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})}^u \in (0, \infty). \quad (2.5.31)$$

Como  $\partial D = \Gamma_1 = \partial\Omega_{0,1} \setminus \partial\Omega$  es de clase  $\mathcal{C}^2$ , existe  $R > 0$  y una aplicación

$$Y : \partial D \rightarrow \Omega_{0,1}$$

tal que, para cada  $x \in \partial D$ ,

$$B_R(Y(x)) \subset \Omega_{0,1}, \quad \bar{B}_R(Y(x)) \cap \partial\Omega = \emptyset \quad \text{y} \quad \bar{B}_R(Y(x)) \cap \partial D = \{x\}.$$

Además, por (2.5.31), para cada  $\lambda \in (\lambda(\Omega), \lambda^*(\Omega_{0,1}))$ , existe  $x_\lambda \in \partial D$  tal que

$$u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda) = \min_{\partial D} u_{[\lambda, \Omega]} \leq \min_{\partial D} L_{\lambda^*(\Omega_{0,1})}^u = b.$$

Señalar que, por construcción,

$$\text{dist}(x_\lambda, Y(x_\lambda)) = R \quad \text{para cada } \lambda \in (\lambda^*(\Omega), \lambda^*(\Omega_{0,1})).$$

Además, la variedad  $\Gamma_1^R$  definida por

$$\Gamma_1^R := \{y \in \Omega_{0,1} : \text{dist}(y, \partial D) = 2R\}$$

es un subconjunto compacto de  $\Omega_{0,1}$  y, por tanto, gracias a (2.5.6), es conocido que

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})} u_{[\lambda, \Omega]} = \infty \quad \text{uniformemente en } \Gamma_1^R. \quad (2.5.32)$$

También, debemos tener en cuenta que, poniendo

$$\Omega_{0,1}^R := \{y \in \Omega_{0,1} : \text{dist}(y, \partial D) < 2R\},$$

la variedad  $\Gamma_1^R$  es una de las componentes de  $\partial\Omega_{0,1}^R$ , mientras que la otra será  $\partial D$ . Sea  $\tilde{x}_\lambda \in \bar{\Omega}_{0,1}^R$  tal que

$$u_{[\lambda, \Omega]}(\tilde{x}_\lambda) = \min_{\bar{\Omega}_{0,1}^R} u_{[\lambda, \Omega]}$$

y supongamos que  $\tilde{x}_\lambda \in \Omega_{0,1}^R$ . Entonces, por cálculo elemental, tendremos que

$$\nabla u_{[\lambda, \Omega]}(\tilde{x}_\lambda) = 0, \quad \Delta u_{[\lambda, \Omega]}(\tilde{x}_\lambda) \geq 0.$$

Por otro lado, ya que  $\lambda > \lambda^*(\Omega) > 0$ , llegamos a que

$$-\Delta u_{[\lambda, \Omega]}(\tilde{x}_\lambda) = \lambda \alpha(\tilde{x}_\lambda) u_{[\lambda, \Omega]}(\tilde{x}_\lambda) + \beta(\tilde{x}_\lambda) v_{[\lambda, \Omega]}(\tilde{x}_\lambda) > 0 \quad \text{en } \Omega_{0,1}^R,$$

porque  $a = 0$  allí dentro, lo cual es una contradicción. Por lo tanto,

$$\tilde{x}_\lambda \in \partial\Omega_{0,1}^R = \Gamma_1 \cup \Gamma_1^R \quad \text{para cada } \lambda \in (\lambda(\Omega), \lambda^*(\Omega_{0,1})),$$

y, por consiguiente, por (2.5.32), existe  $\tilde{\lambda}_1 \in (\lambda^*(\Omega), \lambda^*(\Omega_{0,1}))$  tal que

$$\min_{\bar{\Omega}_{0,1}^R} u_{[\lambda, \Omega]} = \min_{\partial D} u_{[\lambda, \Omega]} = u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda) \leq b$$

para cada  $\lambda \in (\tilde{\lambda}_1, \lambda^*(\Omega_{0,1}))$ . En particular,

$$u_{[\lambda, \Omega]}(x) \geq u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda) \quad \text{para cada } x \in \bar{B}_R(Y(x_\lambda)). \quad (2.5.33)$$

Ahora, para cada  $\eta > 0$  y  $\lambda \in (\tilde{\lambda}_1, \lambda^*(\Omega_{0,1}))$ , denotamos mediante  $\varphi_\lambda$  la función

$$\varphi_\lambda(x) := e^{-\eta|x-Y(x_\lambda)|^2} - e^{-\eta R^2} \quad \text{para cada } x \in \bar{B}_R(Y(x_\lambda)).$$

Un cálculo directo muestra que, para cada  $x \in B_R(Y(x_\lambda))$ ,

$$(-\Delta - \lambda\alpha)\varphi_\lambda(x) = (2\eta N - 4\eta^2|x - Y(x_\lambda)|^2 - \lambda\alpha(x)) e^{-\eta|x-Y(x_\lambda)|^2} + \lambda\alpha(x)e^{-\eta R^2}$$

y, por tanto, existen  $\eta > 0$  y  $\omega > 0$  tal que, para cada  $\lambda \in (\tilde{\lambda}_1, \lambda^*(\Omega_{0,1}))$ ,

$$(-\Delta - \lambda\alpha)\varphi_\lambda \leq -\omega \quad \text{en } A_R := B_R(Y(x_\lambda)) \setminus \bar{B}_{\frac{R}{2}}(Y(x_\lambda)). \quad (2.5.34)$$

A continuación, asumiremos que  $\eta$  ha sido elegido de forma que satisfaga (2.5.34). Puesto que  $\bar{B}_{\frac{R}{2}}(Y(x_\lambda))$  es un subconjunto compacto de  $\Omega_{0,1}$ , (2.5.6) implica

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})} \min_{\bar{B}_{\frac{R}{2}}(Y(x_\lambda))} u_{[\lambda, \Omega]} = \infty.$$

De esta manera, poniendo

$$c_\lambda := \frac{\min_{\bar{B}_{\frac{R}{2}}(Y(x_\lambda))} u_{[\lambda, \Omega]} - u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda)}{e^{-\eta \frac{R^2}{4}} - e^{-\eta R^2}},$$

obtenemos que

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})} c_\lambda = \infty, \quad (2.5.35)$$

porque

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})} u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda) = b.$$

Señalar que, por la definición de  $c_\lambda$ , para cada  $\lambda \in (\tilde{\lambda}_1, \lambda^*(\Omega_{0,1}))$ , uno tiene que

$$u_{[\lambda, \Omega]}(x) \geq u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda) + c_\lambda \left( e^{-\eta \frac{R^2}{4}} - e^{-\eta R^2} \right) \quad \forall x \in \bar{B}_{\frac{R}{2}}(Y(x_\lambda)). \quad (2.5.36)$$

Posteriormente, para cada  $\lambda \in (\tilde{\lambda}_1, \lambda^*(\Omega_{0,1}))$ , consideramos la función auxiliar

$$u_\lambda := u_{[\lambda, \Omega]} - u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda) - c_\lambda \varphi_\lambda \quad \text{en} \quad A_R = B_R(Y(x_\lambda)) \setminus \bar{B}_{\frac{R}{2}}(Y(x_\lambda)).$$

Por (2.5.36), tenemos que

$$u_\lambda \geq 0 \quad \text{en} \quad \partial B_{\frac{R}{2}}(Y(x_\lambda)).$$

Además, puesto que

$$\varphi_\lambda = 0 \quad \text{en} \quad \partial B_R(Y(x_\lambda)),$$

(2.5.33) implica

$$u_\lambda = u_{[\lambda, \Omega]} - u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda) \geq 0 \quad \text{en} \quad \partial B_R(Y(x_\lambda)).$$

También, por (2.5.34), obtenemos que, en todos partes de  $A_R$ ,

$$\begin{aligned} (-\Delta - \lambda\alpha)u_\lambda &= (-\Delta - \lambda\alpha)u_{[\lambda, \Omega]} - c_\lambda(-\Delta - \lambda\alpha)\varphi_\lambda \\ &= \beta v_{[\lambda, \Omega]} - c_\lambda(-\Delta - \lambda\alpha)\varphi_\lambda \\ &> -c_\lambda(-\Delta - \lambda\alpha)\varphi_\lambda > c_\lambda \omega > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada  $\lambda \in (\tilde{\lambda}_1, \lambda^*(\Omega_{0,1}))$ , se ha probado que

$$(-\Delta - \lambda\alpha)u_\lambda > 0 \quad \text{en} \quad A_R, \quad u_\lambda \geq 0 \quad \text{en} \quad \partial A_R. \quad (2.5.37)$$

Denotamos  $(\varphi, \psi) \gg (0, 0)$  como una autofunción principal asociada con

$$0 = \Sigma[\lambda^*(\Omega_{0,1}), \Omega_{0,1}] = \sigma[\mathcal{A}(-\lambda^*(\Omega_{0,1})\alpha, -\lambda^*(\Omega_{0,1})\gamma), \Omega_{0,1}].$$

Entonces,  $\varphi \geq 0$  en  $\partial A_R$ , y para cada  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,1})$ , tenemos que

$$(-\Delta - \lambda\alpha)\varphi > (-\Delta - \lambda^*(\Omega_{0,1})\alpha)\varphi = \beta\psi > 0 \quad \text{en } A_R.$$

De manera que, de acuerdo con el Teorema 1.2, obtenemos que

$$\sigma[-\Delta - \lambda\alpha] > 0,$$

y, por eso, gracias de nuevo al Teorema 1.2, desde (2.5.37) llegamos a que

$$u_\lambda(x) > 0 \quad \text{si } \frac{R}{2} < |x - Y(x_\lambda)| < R.$$

Por consiguiente,

$$u_{[\lambda, \Omega]}(x) > u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda) + c_\lambda \varphi_\lambda(x) \quad \text{para cada } x \in A_R. \quad (2.5.38)$$

Ahora, poniendo  $n_\lambda := (Y(x_\lambda) - x_\lambda)/R$ , resulta que

$$\frac{\partial u_{[\lambda, \Omega]}}{\partial n_\lambda}(x_\lambda) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda + t n_\lambda) - u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda)}{t},$$

y, de acuerdo con (2.5.38), tenemos que, para cada  $t \in (0, \frac{R}{2})$ ,

$$\begin{aligned} \frac{u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda + t n_\lambda) - u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda)}{t} &\geq c_\lambda \frac{\varphi_\lambda(x_\lambda + t n_\lambda)}{t} \\ &= c_\lambda \frac{e^{-\eta|x_\lambda + t n_\lambda - Y(x_\lambda)|^2} - e^{-\eta R^2}}{t} \\ &= c_\lambda \frac{e^{-\eta|t n_\lambda - R n_\lambda|^2} - e^{-\eta R^2}}{t} \\ &= c_\lambda \frac{e^{-\eta(t-R)^2} - e^{-\eta R^2}}{t}. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\frac{\partial u_{[\lambda, \Omega]}}{\partial n_\lambda}(x_\lambda) \geq c_\lambda \lim_{t \downarrow 0} \frac{e^{-\eta(t-R)^2} - e^{-\eta R^2}}{t} = c_\lambda 2\eta R e^{-\eta R^2}$$

y, por lo tanto, debido a (2.5.35), obtenemos que

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})} \frac{\partial u_{[\lambda, \Omega]}}{\partial n_\lambda}(x_\lambda) = \infty. \quad (2.5.39)$$

A continuación, para cada  $\lambda \leq \lambda^*(\Omega_{0,1})$  suficientemente cercano a  $\lambda^*(\Omega_{0,1})$ , consideramos el problema auxiliar

$$-\Delta u = \lambda \alpha u - af(\cdot, u)u \quad \text{en } D, \quad u = u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda) \quad \text{en } \partial D. \quad (2.5.40)$$

Como  $\lambda \leq \lambda^*(\Omega_{0,1}) < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ , tenemos que

$$\sigma[-\Delta - \lambda \alpha, \Omega_{0,2}] \geq \sigma[-\Delta - \lambda^*(\Omega_{0,2}) \alpha, \Omega_{0,2}] > 0.$$

De hecho, sea  $(\varphi, \psi) \gg (0, 0)$  una autofunción principal de  $0 = \Sigma[\lambda^*(\Omega_{0,2}), \Omega_{0,2}]$ . Entonces,

$$(-\Delta - \lambda^*(\Omega_{0,2}) \alpha) \varphi = \beta \psi > 0 \quad \text{en } \Omega_{0,2},$$

y, por lo tanto, por el Teorema 1.2,

$$\sigma[-\Delta - \lambda^*(\Omega_{0,2}) \alpha, \Omega_{0,2}] > 0.$$

De acuerdo con el Lema 2.24, (2.5.40) posee una única solución positiva, denotada por

$$U_{[\lambda, D]} \quad \text{para cada } \lambda \leq \lambda^*(\Omega_{0,1}).$$

Además, puesto que  $u_{[\lambda, \Omega]}|_D$  nos proporciona una supersolución positiva estricta de (2.5.40), tenemos que

$$U_{[\lambda, D]} \ll u_{[\lambda, \Omega]}, \quad \text{en } \bar{D},$$

si  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,1})$ . Por consiguiente, ya que

$$U_{[\lambda, D]}(x_\lambda) = u_{[\lambda, \Omega]}(x_\lambda),$$

para tal rango de  $\lambda$ 's obtenemos que

$$\frac{\partial U_{[\lambda, D]}}{\partial n_\lambda}(x_\lambda) > \frac{\partial u_{[\lambda, \Omega]}}{\partial n_\lambda}(x_\lambda)$$

y, por consiguiente, por (2.5.39),

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})} \frac{\partial U_{[\lambda, D]}}{\partial n_\lambda}(x_\lambda) = \infty.$$

Esto es imposible, ya que  $U_{[\lambda, D]}$  se aproxima en  $\mathcal{C}^1(\bar{D})$ , cuando  $\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,1})$ , a la única solución positiva del problema

$$-\Delta u = \lambda \alpha u - af(\cdot, u)u \quad \text{en } D, \quad u = b \quad \text{en } \partial D.$$

Esta contradicción concluye la demostración de (2.5.30) y, por tanto, del Teorema 2.3.

### 2.5.7 Conclusión de la demostración del Teorema 2.2

Gracias a (2.5.22), para completar la prueba del Teorema 2.2, es suficiente probar que

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,2})} \min_{\partial\Omega_{0,2}} L_{[\lambda,D]}^{\min} = (\infty, \infty), \quad (2.5.41)$$

donde  $D = \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}$ , y que, para alguna solución larga  $L$  de (2.1.6) en  $\Omega_+$ ,

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,2})} L_{[\lambda,D]}^{\min} = L \quad \text{en } \Omega_+. \quad (2.5.42)$$

Es conocido hasta ahora que, para cada  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ ,

$$L_{[\lambda,D]}^{\min} \geq \theta_{[\lambda,D]}.$$

Además, la demostración de (2.5.30) se puede adaptar *mutatis mutandis* para probar que

$$\lim_{\lambda \uparrow \lambda^*(\Omega_{0,2})} \min_{\partial\Omega_{0,2}} \theta_{[\lambda,D]} = (\infty, \infty).$$

En esta ocasión, uno debería considerar  $\partial\Omega_{0,2}$ , en vez de  $\partial D$ . Para llevar a cabo la demostración de (2.5.42), consideramos el límite puntual (2.5.27), que está bien definido y es igual a  $(\infty, \infty)$  en  $\bar{\Omega}_{0,2}$ , así como, para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, los conjuntos abiertos

$$\Omega_+^n := \{x \in \Omega_+ : \text{dist}(x, \partial\Omega_+) > 1/n\}.$$

A continuación, para cada  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ , ponemos

$$(M_\lambda, N_\lambda) := \max_{\partial\Omega_+^n} L_{[\lambda,D]}^{\min}.$$

Por definición,

$$L_{[\lambda,D]}^{\min}|_{\partial\Omega_+^n} \leq (M_\lambda, N_\lambda).$$

De esta manera, por el Lema 2.22,

$$L_{[\lambda,D]}^{\min} \leq \theta_{[\lambda, \Omega_+^n, M_\lambda, N_\lambda]} \leq \theta_{[\lambda^*(\Omega_{0,2}), \Omega_+^n, M_\lambda, N_\lambda]} \leq L_{[\lambda^*(\Omega_{0,2}), \Omega_+^n]}^{\min} \quad \text{en } \Omega_+^n.$$

Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema 2.23,

$$L_{[\lambda,D]}^{\min} \leq L_{[\lambda^*(\Omega_{0,2}), \Omega_+]}^{\max} \quad \text{en } \Omega_+,$$

para todo  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ . Por consiguiente, el límite puntual (2.5.27) es finito en  $\Omega_+$ . Además, por compacidad y monotonía en  $\lambda$ , en realidad es una solución larga de (2.1.5) en  $\Omega_+$ . Esto concluye la demostración.



## 2.6 Demostración del Teorema 2.4

A lo largo de esta sección, denotaremos

$$w := (u, v).$$

La Parte (a) se obtiene directamente de la última afirmación del Teorema 2.11, así como la Parte (b), por lo que debido al Teorema 2.3, (2.1.1) tiene un estado de coexistencia para cada  $\lambda \in (\lambda^*(\Omega), \lambda^*(\Omega_{0,1}))$ . Por tanto falta por demostrar que las Partes (c) y (d). Supongamos

$$\lambda^*(\Omega_{0,1}) \leq \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2}).$$

Entonces,

$$\lambda > \lambda^*(\Omega_{0,1}) - \varepsilon$$

para todo  $\varepsilon > 0$  y la Proposición 2.12 nos garantiza que

$$w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \geq w_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}) - \varepsilon, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0),$$

para cada  $t \geq 0$ . De esta manera, puesto que

$$\lambda^*(\Omega_{0,1}) - \varepsilon < \lambda^*(\Omega_{0,1}),$$

por el Teorema 2.4(b) llegamos a que

$$\liminf_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \geq \theta_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}) - \varepsilon, \Omega, 0, 0]}. \quad (2.6.1)$$

Como (2.6.1) es cierta para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, a partir del Teorema 2.3 obtenemos que

$$\liminf_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \geq \mathfrak{M}_{[\lambda^*(\Omega_{0,1}), \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}]}^{\min}. \quad (2.6.2)$$

En particular,

$$\liminf_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0)) = (\infty, \infty) \quad (2.6.3)$$

uniformemente en subconjuntos compactos de  $\bar{\Omega}_{0,1} \setminus \partial\Omega$  y, por eso, para cada  $M > 0$  y  $N > 0$ , existe una constante  $T_{M,N} > 0$  tal que

$$w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(x, t; u_0, v_0) \geq (M, N),$$

para cada

$$x \in \Gamma_1 \quad \text{y} \quad t \geq T_{M,N}.$$

De esta manera, poniendo

$$D := \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1},$$

$(u_{[\lambda,\Omega,0,0]}, v_{[\lambda,\Omega,0,0]})$  es una supersolución de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - a f(\cdot, u)u & \text{en } D \times (T_{M,N}, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - b g(\cdot, v)v & \\ (u, v) = (M, N) & \text{en } \Gamma_1 \times (T_{M,N}, \infty), \\ (u, v)(\cdot, T_{M,N}) = (u_{[\lambda,\Omega,0,0]}, v_{[\lambda,\Omega,0,0]})(\cdot, T_{M,N}; u_0, v_0) & \text{en } D. \end{cases}$$

Consecuentemente, por la Proposición (2.12), para cada  $x \in D$  y  $t \geq T_{M,N}$ , tenemos que

$$w_{[\lambda,\Omega,0,0]}(x, t; u_0, v_0) \geq w_{[\lambda,D,M,N]}(x, t - T_{M,N}; u_0^{M,N}, v_0^{M,N}),$$

donde, hemos denotado

$$(u_0^{M,N}, v_0^{M,N}) := (u_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, T_{M,N}; u_0, v_0), v_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, T_{M,N}; u_0, v_0)).$$

De esta manera, como  $\lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$ , de acuerdo con el Lema 2.24, obtenemos que

$$\liminf_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda,\Omega,0,0]}(x, t; u_0, v_0), v_{[\lambda,\Omega,0,0]}(x, t; u_0, v_0)) \geq \theta_{[\lambda,D,M,N]}$$

y, por lo tanto, pasando al límite como  $M \uparrow \infty$  y  $N \uparrow \infty$ , tenemos que

$$\liminf_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda,\Omega,0,0]}(x, t; u_0, v_0), v_{[\lambda,\Omega,0,0]}(x, t; u_0, v_0)) \geq L_{[\lambda,D]}^{\min} \quad \text{en } D := \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1}$$

(ver la demostración del Teorema 2.2). Por lo que, por (2.6.3), parece aparente que

$$\liminf_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda,\Omega,0,0]}(x, t; u_0, v_0), v_{[\lambda,\Omega,0,0]}(x, t; u_0, v_0)) \geq \mathfrak{M}_{[\lambda,D]}^{\min} \quad \text{en } \Omega, \quad (2.6.4)$$

lo que nos proporciona la estimación inferior del Theorem 2.4(c,d).

Supongamos, además, que  $(u_0, v_0)$  es una subsolución de (2.1.6) en  $\Omega$ . Entonces, para cada  $t > 0$ ,

$$x \mapsto w_{[\lambda,\Omega,0,0]}(x, t; u_0, v_0),$$

$x \in \Omega$ , es una subsolución de (2.1.5) en  $\Omega$ , ya que la aplicación  $t \mapsto w_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, t; u_0, v_0)$  es creciente en cada componente. Fijamos  $t > 0$  y ponemos

$$(M_t, N_t) := \left( \max_{\bar{D}} u_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, t; u_0, v_0), \max_{\bar{D}} v_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \right).$$

Por el Lema 2.24, para todo

$$(M, N) \geq (M_t, N_t),$$

tenemos

$$w_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \leq \theta_{[\lambda,D,M,N]}, \quad \text{en } D.$$

Por consiguiente, por la construcción de la solución minimal larga, pasando al límite cuando  $M \uparrow \infty$  y  $N \uparrow \infty$  muestra que

$$w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \leq L_{[\lambda, D]}^{\min}, \quad \text{en } D.$$

y, por tanto, pasando al límite cuando  $t \uparrow \infty$ ,

$$\limsup_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \leq L_{[\lambda, D]}^{\min}, \quad \text{en } D.$$

Por lo tanto, por (2.6.4), encontramos que

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0)) = \mathfrak{M}_{[\lambda, D]}^{\min} \quad \text{en } \Omega, \quad (2.6.5)$$

lo que concluye la demostración de la última afirmación del Teorema 2.4(c).

A continuación, suponemos que  $(u_0, v_0)$  es arbitrario —no necesariamente una subsolución de (2.1.6) en  $\Omega$ — y que  $\lambda \geq \lambda^*(\Omega_{0,2})$ . Entonces, por la Proposición 2.12,

$$w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \geq w_{[\lambda^*(\Omega_{0,2}) - \varepsilon, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0),$$

en  $\Omega$ , para cualquier  $\varepsilon > 0$ , y, por tanto, a partir de (2.6.4) llegamos a que

$$\liminf_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0)) \geq \mathfrak{M}_{[\lambda^*(\Omega_{0,2}) - \varepsilon, D]}^{\min} \quad \text{en } \Omega, \quad (2.6.6)$$

tan pronto como

$$\lambda^*(\Omega_{0,1}) < \lambda^*(\Omega_{0,2}) - \varepsilon < \lambda^*(\Omega_{0,2}).$$

Señalar que (2.6.5) no debería ser aplicado, puesto que  $(u_0, v_0)$  podría no ser una subsolución de (2.1.6) en  $\Omega$ . Como tenemos (2.6.6) para todo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, y, de acuerdo con el Teorema 2.2,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathfrak{M}_{[\lambda^*(\Omega_{0,2}) - \varepsilon, D]}^{\min} = \mathfrak{M}_{[\lambda^*(\Omega_{0,2}), \Omega_+]}$$

es una metasolución soportada en  $\Omega_+$ , entonces cuando  $\varepsilon \downarrow 0$ , (2.6.6) implica que

$$\liminf_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0)) \geq \mathfrak{M}_{[\lambda^*(\Omega_{0,2}), \Omega_+]} \quad \text{en } \Omega.$$

En particular,

$$\liminf_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0)) = (\infty, \infty) \quad \text{en } \Omega \setminus \Omega_+. \quad (2.6.7)$$

En realidad, (2.6.7) ocurre uniformemente en  $\partial\Omega_+$ , y, por eso, para cada  $M > 0$  y  $N > 0$ , existe un instante  $T_{M,N} > 0$  para el cual

$$w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(x, t; u_0, v_0) \geq (M, N)$$

si

$$x \in \partial\Omega_+ \quad \text{y} \quad t \geq T_{M,N}.$$

Claramente,  $w_{[\lambda,\Omega,0,0]}$  es una supersolución de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - af(\cdot, u)u & \text{en } \Omega_+ \times (T_{M,N}, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - bg(\cdot, v)v & \text{en } \partial\Omega_+ \times (T_{M,N}, \infty), \\ (u, v) = (M, N) & \text{en } \partial\Omega_+ \times (T_{M,N}, \infty), \\ (u, v)(\cdot, T_{M,N}) = (u_{[\lambda,\Omega,0,0]}, v_{[\lambda,\Omega,0,0]})(\cdot, T_{M,N}; u_0, v_0) & \text{en } \Omega_+, \end{cases}$$

y, por tanto, de acuerdo con la Proposición 2.12, para cada  $x \in D$  y  $t \geq T_{M,N}$ , tenemos que

$$w_{[\lambda,\Omega,0,0]}(x, t; u_0, v_0) \geq w_{[\lambda,\Omega_+,M,N]}(x, t - T_{M,N}; u_0^{M,N}, v_0^{M,N}).$$

De esta manera, por el Teorema 2.21,

$$\liminf_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda,\Omega,0,0]}(x, t; u_0, v_0) \geq \theta_{[\lambda,\Omega_+,M,N]},$$

y, cuando  $M \uparrow \infty$  y  $N \uparrow \infty$ , obtenemos

$$\liminf_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda,\Omega,0,0]}(x, t; u_0, v_0) \geq L_{[\lambda,\Omega_+]}^{\min}, \quad \text{en } \Omega_+.$$

Por consiguiente, combinando esta estimación con (2.6.7) muestra que

$$\liminf_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, t; u_0, v_0)) \geq \mathfrak{M}_{[\lambda,\Omega_+]}^{\min} \quad \text{en } \Omega, \quad (2.6.8)$$

lo que nos proporciona la estimación inferior del Teorema 2.4(d).

Ahora, además de que  $\lambda \geq \lambda^*(\Omega_{0,2})$ , suponemos que  $(u_0, v_0)$  es una subsolución de (2.1.6) en  $\Omega$ . Entonces, para cada  $t > 0$ ,

$$(u_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, t; u_0, v_0))$$

es una subsolución de (2.1.5) en  $\Omega$ . Fijamos  $t > 0$  y ponemos

$$(M_t, N_t) := \left( \max_{\bar{\Omega}_+} u_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, t; u_0, v_0), \max_{\bar{\Omega}_+} v_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \right).$$

De acuerdo con el Lema 2.22, para cada  $M \geq M_t$  y  $N \geq N_t$ , tenemos que

$$(u_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, t; u_0, v_0)) \leq \theta_{[\lambda,\Omega_+,M,N]} \quad \text{en } \Omega_+,$$

y, por tanto, cuando  $M \uparrow \infty$  y  $N \uparrow \infty$ , muestra que

$$w_{[\lambda,\Omega,0,0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \leq L_{[\lambda,\Omega_+]}^{\min} \quad \text{en } \Omega_+,$$

y, por lo tanto,

$$\limsup_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \leq L_{[\lambda, \Omega_+]}^{\min} \quad \text{en } \Omega_+.$$

Por consiguiente, debido a (2.6.7) y (2.6.8), encontramos que

$$\lim_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) = \mathfrak{M}_{[\lambda, \Omega_+]}^{\min} \quad \text{en } \Omega,$$

lo que prueba la última afirmación del Teorema 2.4(d).

Para finalizar la demostración del Teorema 2.4 debemos obtener las estimaciones superiores para  $(u_0, v_0) > (0, 0)$  arbitrario, con el fin de conseguir las estimaciones superiores de las Partes (c) y (d). Nuestra estrategia consistirá en obtener cotas a priori en  $\Omega_+$  para las soluciones de (2.1.1).

Fijamos  $\lambda \geq \lambda^*(\Omega_{0,1})$  y consideramos

$$w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, 1; u_0, v_0) \gg (0, 0).$$

Entonces, existe  $\kappa > 1$  tal que

$$(u_1, v_1) := w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, 1; u_0, v_0) < (\kappa\varphi, \kappa\psi) \quad (2.6.9)$$

donde  $(\varphi, \psi) \gg (0, 0)$  es una autofunción principal asociada con  $\Sigma[\lambda, \Omega]$ . Afirmamos que existe

$$\Lambda > \max\{\lambda, \lambda^*(\Omega_{0,2})\} \quad (2.6.10)$$

para el cual  $(\kappa\varphi, \kappa\psi)$  es una subsolución de (2.1.5) para  $\kappa > 1$  suficientemente grande. De hecho, puesto que

$$(\kappa\varphi, \kappa\psi) = (0, 0), \quad \text{en } \partial\Omega,$$

un cálculo directo prueba que  $(\kappa\varphi, \kappa\psi)$  es una subsolución de (2.1.5) sí, y sólo si

$$\Sigma[\Lambda, \Omega] \leq -af(\cdot, \kappa\varphi) \quad \text{y} \quad \Sigma[\Lambda, \Omega] \leq -bg(\cdot, \kappa\psi),$$

en  $\Omega$ , lo que puede ser obtenido puesto que (2.6.10) implica

$$\Sigma[\Lambda, \Omega] < \Sigma[\lambda^*(\Omega_{0,2}), \Omega] < 0.$$

Ahora, por la Proposición 2.12, a partir de (2.6.9) obtenemos que, para cada  $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$ ,

$$w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(x, t+1; u_0, v_0) = w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(x, t; u_1, v_1) \leq w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; \kappa\varphi, \kappa\psi).$$

Similarmente, (2.6.10) implica

$$w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; \kappa\varphi, \kappa\psi) \ll w_{[\Lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; \kappa\varphi, \kappa\psi).$$

De esta manera, encontramos que, para cada  $t > 0$ ,

$$w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t+1; u_0, v_0) \leq w_{[\Lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; \kappa\varphi, \kappa\psi), \quad (2.6.11)$$

en  $\Omega$ . Como  $(\kappa\varphi, \kappa\psi)$  es una subsolución de (2.1.5), ya sabemos que

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u_{[\Lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; \kappa\varphi, \kappa\psi), v_{[\Lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; \kappa\varphi, \kappa\psi)) = L_{[\Lambda, \Omega_+]}^{\min} \quad \text{en } \Omega_+,$$

y, de acuerdo con (2.6.11),

$$\limsup_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0)) \leq L_{[\lambda, \Omega_+]}^{\min} \quad \text{en } \Omega_+. \quad (2.6.12)$$

Por consiguiente, la solución

$$(u_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}, v_{[\lambda, \Omega, 0, 0]})$$

es uniformemente acotada por arriba en cualquier subconjunto compacto de  $\Omega_+$ . Esto nos permite completar la demostración del teorema.

Supongamos que  $\lambda^*(\Omega_{0,1}) \leq \lambda < \lambda^*(\Omega_{0,2})$  y, para  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, consideramos

$$D^n := \{x \in D := \Omega \setminus \bar{\Omega}_{0,1} : \text{dist}(x, \partial D) > 1/n\}.$$

Fijamos uno de esos  $n$ 's. Puesto que  $\partial D^n \subset \Omega_+$ , a partir de (2.6.12) sabemos que existe

$$(M_0, N_0) > (0, 0)$$

tal que, para cada  $M > M_0, N > N_0$ , y  $t > 0$ ,

$$w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \leq (M, N), \quad \text{en } \partial D^n,$$

y, por tanto, de acuerdo con la Proposición 2.12, para cada  $t > 0$ ,

$$w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]} \leq w_{[\lambda, D^n, M, N]}, \quad \text{en } D^n,$$

donde  $w_{[\lambda, D^n, M, N]}$  es la solución definida en el Lema 2.25. Por el Lema 2.25, tenemos

$$\lim_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, D^n, M, N]}(\cdot, t; u_0, v_0) = \theta_{[\lambda, D^n, M, N]}, \quad \text{en } D^n,$$

y, por lo tanto,

$$\limsup_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0)) \leq \theta_{[\lambda, D^n, M, N]} \quad \text{en } D^n. \quad (2.6.13)$$

Por consiguiente, pasando al límite cuando  $M, N \uparrow \infty$  en (2.6.13) encontramos que

$$\limsup_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0)) \leq L_{[\lambda, D^n]}^{\min} \quad \text{en } D^n. \quad (2.6.14)$$

Como (2.6.14) es válido para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, y, de acuerdo con el análisis ya realizado en la demostración del Teorema 2.2,

$$L_{[\lambda, D]}^{\max} = \lim_{n \uparrow \infty} L_{[\lambda, D^n]}^{\min},$$

(2.6.14) implica

$$\limsup_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0)) \leq L_{[\lambda, D]}^{\max} \quad \text{en } D,$$

lo que concluye la demostración de la Parte (c).

Finalmente, suponemos que  $\lambda \geq \lambda^*(\Omega_{0,2})$ , y, para cada  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, consideramos

$$\Omega_+^n := \{x \in \Omega_+ : \text{dist}(x, \partial\Omega_+) > 1/n\}.$$

Fijamos uno de esos  $n$ 's. Puesto que  $\partial\Omega_+^n \subset \Omega_+$ , por (2.6.12), existe  $(M_0, N_0) > (0, 0)$  tal que, para cada  $M > M_0$ ,  $N > N_0$  y  $t > 0$ ,

$$w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \leq (M, N) \quad \text{en } \partial\Omega_+^n.$$

De acuerdo con la Proposición 2.12, tenemos que, para cada  $t > 0$ ,

$$w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]} \leq \theta_{[\lambda, \Omega_+^n, M, N]} \quad \text{en } \Omega_+^n,$$

donde

$$\theta_{[\lambda, \Omega_+^n, M, N]} := (u_{[\lambda, \Omega_+^n, M, N]}, v_{[\lambda, \Omega_+^n, M, N]})$$

representa la única solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda \alpha u + \beta v - af(\cdot, u)u & \text{en } \Omega_+^n \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \delta u + \lambda \gamma v - bg(\cdot, v)v & \text{en } \partial\Omega_+^n \times (0, \infty), \\ (u, v) = (M, N) & \text{en } \partial\Omega_+^n \times (0, \infty), \\ (u(\cdot, 0), v(\cdot, 0)) = (u_0, v_0) & \text{en } \Omega_+^n. \end{cases}$$

Gracias al Teorema 2.21,

$$\lim_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, \Omega_+^n, M, N]}(\cdot, t; u_0, v_0) = \theta_{[\lambda, \Omega_+^n, M, N]} \quad \text{en } \Omega_+^n.$$

De esta manera,

$$\limsup_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \leq \theta_{[\lambda, \Omega_+^n, M, N]} \quad \text{en } \Omega_+^n. \quad (2.6.15)$$

Por consiguiente, pasando al límite cuando  $M, N \uparrow \infty$  en (2.6.15) da

$$\limsup_{t \uparrow \infty} (u_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0), v_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0)) \leq L_{[\lambda, \Omega_+^n]}^{\min} \quad \text{en } \Omega_+^n. \quad (2.6.16)$$

Como (2.6.16) es válido para todo  $n \in \mathbb{N}$  suficientemente grande y

$$L_{[\lambda, \Omega_+]}^{\max} = \lim_{n \uparrow \infty} L_{[\lambda, \Omega_+^n]}^{\min},$$

a partir de (2.6.16) parece aparente que

$$\limsup_{t \uparrow \infty} w_{[\lambda, \Omega, 0, 0]}(\cdot, t; u_0, v_0) \leq L_{[\lambda, \Omega_+]}^{\max} \quad \text{en } \Omega_+,$$

lo que concluye la demostración de la Parte (d). Lo que completa la demostración del Teorema 2.4.

## Capítulo 3

# Una clase especial de sistemas cooperativos sublineales

Este capítulo caracteriza la dinámica de las soluciones positivas para una clase especial de sistemas parabólicos cooperativos sublineales con una de las ecuaciones de tipo lineal y la otra no-lineal, pero anulándose en un subdominio del subyacente dominio. El análisis de este problema es necesario para averiguar las dinámicas de clases más generales de sistemas cooperativos con las no-linearidades espacialmente heterogéneas, como las introducidas en López-Gómez & Molina-Meyer [50]. La caracterización de la existencia de estados de coexistencia depende de una *cota espectral* asociada a un operador no-local, la cual no ha sido previamente documentada en literatura.

### 3.1 Introducción

Este capítulo caracteriza la dinámica del modelo parabólico

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda u + \alpha v - a(x)f(x, u)u & \text{en } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \beta u + \lambda v & \\ (u, v) = (0, 0) & \text{en } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ (u(\cdot, 0), v(\cdot, 0)) = (u_0, v_0) > (0, 0) & \text{en } \Omega, \end{array} \right. \quad (3.1.1)$$

donde  $\Omega$  es un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 1$ , con frontera  $\partial\Omega$  de clase  $\mathcal{C}^{2+\nu}$  para algún  $\nu \in (0, 1)$ ,  $a \in \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega})$  satisface

$$a(x) \geq 0 \quad \text{para cada } x \in \bar{\Omega}, \quad (3.1.2)$$

$\Delta$  representa el operador Laplaciano en  $\mathbb{R}^N$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$  y  $\alpha > 0$  son considerados *parámetros de continuación* reales, y

$$f \in \mathcal{C}^{\nu, 1+\nu}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$$



satisface las condiciones (B3-4) de la forma en que fueron establecidas en el Capítulo 2. A lo largo de gran parte de este capítulo, impondremos las siguientes suposiciones de estructura sobre  $\Omega$  para la función peso  $a(x)$ :

(A)  $\partial\Omega$  consta de dos componentes,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , de la misma forma que  $\partial\Omega_+$ , donde

$$\Omega_+ := \{x \in \Omega : a(x) > 0\}.$$

Además,  $\Gamma_2$  será una de las componentes de  $\Omega_+$ , mientras que la otra, denotada por  $\Gamma_3$ , se encuentra dentro de  $\Omega$  y es también de clase  $\mathcal{C}^{2+\nu}$ .

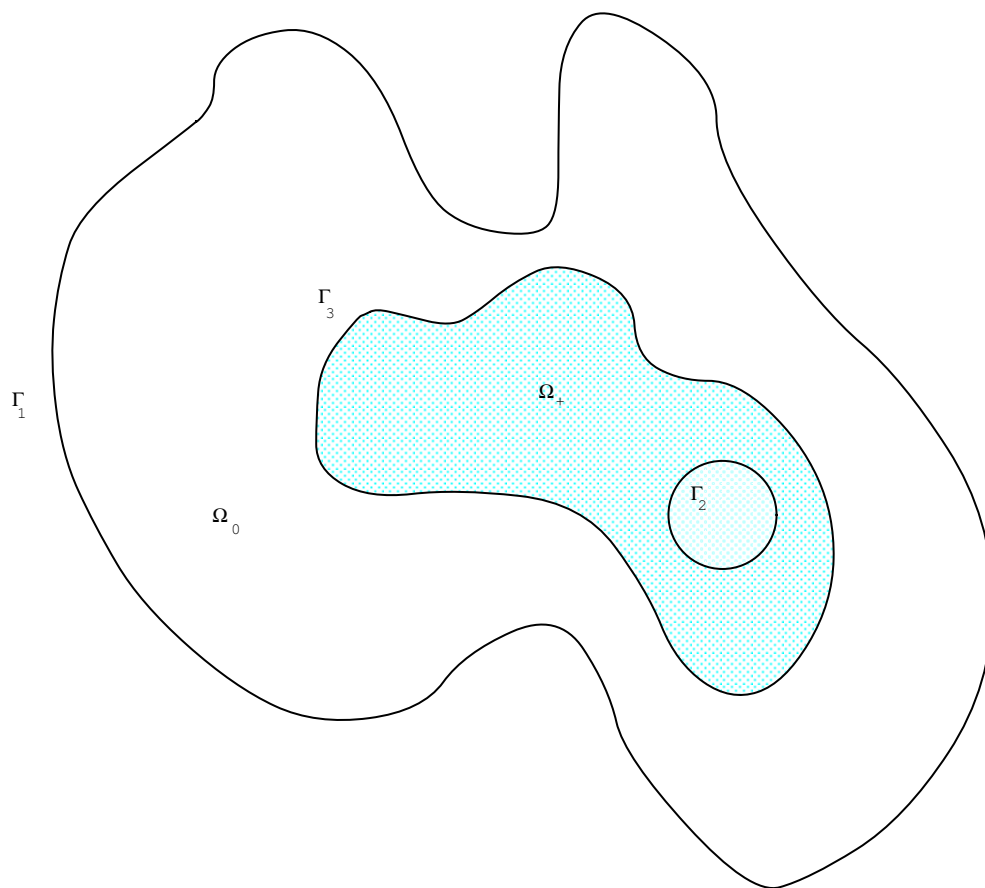


Figura 3.1: Configuración nodal de  $a(x)$ .

La figura 3.1 muestra una situación típica donde (A) es satisfecha. En esta figura y para lo que resta de este capítulo denotaremos

$$\Omega_0 := \Omega \setminus \bar{\Omega}_+.$$

En la práctica, bajo la condición (A), la condición estructural satisfecha por  $f$  (2.1.4), no necesita ser impuesta en todo  $\Omega$ , sólo sobre  $\Omega_+$ . Alternativamente, en vez de (A), impondremos alguna de las siguientes condiciones:

(B)  $a = 0$  en  $\Omega$  (entonces, (3.1.1) pasa a ser un problema parabólico lineal);

(C)  $a(x) > 0$  para cada  $x \in \bar{\Omega}$ ;

(D)  $\bar{\Omega}_+ \subset \Omega$ , i.e.,  $\Gamma_2 = \emptyset$ .

El caso (A) es en cierto modo, una situación intermedia entre los casos límites (B) y (C). Todos los resultados matemáticos, así como los detalles técnicos de sus respectivas demostraciones, bajo la condición (A), pueden ser realizados *mutatis mutandis* para cubrir el caso (D). De esta manera, el caso (D) no va a ser considerado en lo sucesivo.

El modelo (3.1.1) se encuentra fuera del ámbito general llevado a cabo en el Capítulo 2 de esta Tesis, puesto que las no-linealidades de cada una de las dos ecuaciones se anulan en diferentes subdominios de  $\Omega$ . De hecho, aunque la no-linealidad de la  $v$ -ecuación de (3.1.1) se anula sobre todo  $\Omega$ , la no-linealidad de la  $u$ -ecuación sólo se anula en  $\Omega_0$ . Por consiguiente, la suposición (B1) del Capítulo 2, que resultó pivotal para la gran mayoría de los resultados obtenidos allí, no es satisfecha en este caso.

El análisis matemático de (3.1.1) va a ser absolutamente necesario para averiguar la dinámica de clases más generales de problemas parabólicos donde el comportamiento nodal de los coeficientes no-negativos en frente de las no-linealidades es arbitrario. Este tipo de estudios más finos serán llevados a cabo en futuros trabajos.

A lo largo de este capítulo, para cada  $V_1, V_2 \in \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega})$ , denotaremos

$$\mathfrak{L}(V_1, V_2) := \begin{pmatrix} -\Delta + V_1 & -\alpha \\ -\beta & -\Delta + V_2 \end{pmatrix}. \quad (3.1.3)$$

Ya que

$$\alpha > 0 \quad \text{y} \quad \beta > 0,$$

$\mathfrak{L}(V_1, V_2)$  es *cooperativo* (como fue discutido en López-Gómez & Molina-Meyer [48] y Amann [7]) en el mismo sentido al considerado mediante (1.1.4) en el Capítulo 1 de esta Tesis. Gracias a lo establecido en el Capítulo 1, para cualquier subdominio suave  $D \subset \Omega$ , hay un único valor  $\tau$  para el cual el problema lineal de autovalores

$$\begin{cases} \mathfrak{L}(V_1, V_2)(\varphi) = \tau(\varphi) & \text{en } D, \\ (\varphi, \psi) = (0, 0) & \text{en } \partial D, \end{cases} \quad (3.1.4)$$

posee una solución  $(\varphi, \psi)$  con  $\varphi > 0$  y  $\psi > 0$ . Tal valor de  $\tau$  es normalmente referido como el *autovalor principal* de  $\mathfrak{L}(V_1, V_2)$  en  $D$  (bajo condiciones de frontera Dirichlet homogéneas). A lo largo de este capítulo será denotado por

$$\sigma[\mathfrak{L}(V_1, V_2), D].$$

También fue establecido en el Capítulo 1 de esta Tesis que  $\sigma[\mathfrak{L}(V_1, V_2), D]$  es *simple y dominante*, en el mismo sentido que (1.1.8). Además, la *autofunción principal*  $(\varphi, \psi)$  es única, salvo constantes multiplicativas, y

$$\varphi \gg 0, \quad \psi \gg 0.$$

Por otro lado, para el resto del capítulo, ponemos

$$\mathfrak{L}_0 := \mathfrak{L}(0, 0) \quad \sigma_1 := \sigma[-\Delta, \Omega], \quad (3.1.5)$$

y denotamos por  $\phi_1 \gg 0$  la autofunción principal asociada con  $\sigma_1$ . Entonces, por un cálculo directo, resulta aparente que

$$\sigma[\mathfrak{L}_0, \Omega] = \sigma_1 - \sqrt{\alpha\beta} \quad \text{y} \quad (\varphi, \psi) = \left( \sqrt{\alpha} \phi_1, \sqrt{\beta} \phi_1 \right). \quad (3.1.6)$$

Pero, excepto en este caso especial, el autovalor principal  $\sigma[\mathfrak{L}(V_1, V_2), D]$  utiliza magnitudes bastante ocultas de los potenciales  $V_1$ ,  $V_2$ , y  $D$ . Por (3.1.6), también tendremos que

$$\sigma[\mathfrak{L}_0, \Omega_0] = \sigma_1^0 - \sqrt{\alpha\beta},$$

donde

$$\sigma_1^0 := \sigma[-\Delta, \Omega_0].$$

Adoptando el lenguaje de Dinámica de Poblaciones, (3.1.1) simula la evolución de dos especies cooperativas,  $u(x, t)$  y  $v(x, t)$ , dispersas de manera aleatoria en  $\Omega$ . En este contexto, las funciones  $u_0 > 0$  y  $v_0 > 0$  representan las distribuciones iniciales de la población, y de la misma forma a lo llevado a cabo en el Capítulo 2 de esta Tesis, (3.1.1) es un modelo cooperativo intermedio que conecta las leyes de Malthus y de Verhulst de Dinámica de Poblaciones. Excepto para el caso lineal (B), no existe ningún resultado disponible sobre la dinámica de (3.1.1), puesto que todos los resultados disponibles han sido obtenidos bajo la suposición (B1) del Capítulo 2, la cual no es válida aquí. Bajo la suposición (B), i.e.,  $a = 0$  en  $\Omega$ , tenemos que

$$\begin{pmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \end{pmatrix} = e^{-\mathfrak{L}(-\lambda, -\lambda)t} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

va a ser la única solución de (3.1.1). Por lo tanto, ya que

$$\sigma[\mathfrak{L}(-\lambda, -\lambda), \Omega] = \sigma[\mathfrak{L}_0, \Omega] - \lambda = \sigma_1 - \sqrt{\alpha\beta} - \lambda,$$

combinando el principio del máximo para sistemas cooperativos con la teoría abstracta de semi-grupos, llegamos a que

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u(x, t), v(x, t)) = \begin{cases} (0, 0) & \text{si } \lambda < \sigma_1 - \sqrt{\alpha\beta}, \\ (\infty, \infty) & \text{si } \lambda > \sigma_1 - \sqrt{\alpha\beta}, \end{cases}$$

para cada  $x \in \Omega$ . Señalar que, en el caso (B),  $(0, 0)$  es el único estado de equilibrio no-negativo de (3.1.1) si  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\sigma[\mathcal{L}_0, \Omega]\}$ , mientras que (3.1.1) admite una línea recta de *estados de coexistencia* en  $\lambda = \sigma[\mathcal{L}_0, \Omega]$ ; esta línea consta de todos los múltiplos positivos de  $(\varphi, \psi)$ .

Los resultados de este capítulo establecen que la dinámica de (3.1.1) es regulada por su estado de equilibrio maximal no-negativo, i.e., por la solución maximal no-negativa

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + \alpha v - af(\cdot, u)u & \text{en } \Omega, \\ -\Delta v = \beta u + \lambda v & \\ (u, v) = (0, 0) & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Por el Lema 2.10 de la Sección 2.3 del Capítulo 2, de la  $u$ -ecuación,

$$v = 0 \quad \text{si} \quad u = 0,$$

porque  $\alpha > 0$ . Similarmente, ya que  $\beta > 0$ , a partir de la  $v$ -ecuación obtenemos que

$$u = 0 \quad \text{si} \quad v = 0.$$

De esta manera, (3.1.7) admite dos tipos de soluciones no-negativas. Conocidas como, el *estado trivial*  $(0, 0)$ , y los *estados de coexistencia*; esos de la forma  $(u, v)$  con  $u \gg 0$  y  $v \gg 0$ . Por la  $v$ -ecuación, si  $(u, v)$  es un estado de coexistencia de (3.1.7), entonces

$$(-\Delta - \lambda)v = \beta u > 0 \quad \text{en } \Omega$$

y, por eso,  $v$  será una supersolución positiva estricta de  $-\Delta - \lambda$  en  $\Omega$  bajo condiciones de frontera Dirichlet homogéneas. De esta manera, debido al Teorema 1.2, tenemos

$$\lambda < \sigma_1. \quad (3.1.8)$$

Consecuentemente,  $\lambda < \sigma_1$  es una condición necesaria para la existencia de un estado coexistencia. El principal resultado de este capítulo bajo la condición (A) es el siguiente.

**Teorema 3.1** *Supongamos (A) y  $\lambda < \sigma_1$ , y ponemos*

$$\begin{cases} \Sigma(\lambda) := \sup_{w \in \mathcal{P}} \inf_{\Omega_0} \frac{(-\Delta - \lambda)w}{(-\Delta - \lambda)^{-1}w}, \\ \mathcal{P} := \{w \in \mathcal{C}_0^2(\bar{\Omega}) : w \gg 0\}. \end{cases} \quad (3.1.9)$$

*Entonces, (3.1.7) posee un estado de coexistencia sí, y sólo si*

$$\lambda < \sigma_1 \quad \text{y} \quad (\sigma_1 - \lambda)^2 < \alpha\beta < \Sigma(\lambda). \quad (3.1.10)$$

*Además, es único, si existe.*

En lo correspondiente a la dinámica de (3.1.1), los principales hallazgos obtenidos en este capítulo pueden ser resumidos en el siguiente resultado.

**Teorema 3.2** *Supongamos (A),  $\lambda < \sigma_1$ ,  $u_0 > 0$ ,  $v_0 > 0$ , y denotamos*

$$(u(x, t), v(x, t))$$

*como la única solución de (3.1.1) (por (3.1.2) y (B3)), globalmente definida en tiempo,  $t \in [0, \infty)$ ). Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(a) *Si  $\alpha\beta \leq (\sigma_1 - \lambda)^2$ , entonces*

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u(x, t), v(x, t)) = (0, 0).$$

(b) *Si  $(\sigma_1 - \lambda)^2 < \alpha\beta < \Sigma(\lambda)$ , entonces*

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u(x, t), v(x, t)) = (u_c, v_c),$$

*donde  $(u_c, v_c)$  es el único estado de coexistencia de (3.1.7).*

(c) *Si  $\alpha\beta \geq \Sigma(\lambda)$ , entonces*

$$\lim_{t \uparrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \lim_{t \uparrow \infty} \|v(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \infty.$$

Teoremas 3.1 y 3.2 establecen que, bajo la condición  $\lambda < \sigma_1$ , la dinámica de (3.1.1) está regulada por el tamaño del parámetro

$$\gamma := \alpha\beta.$$

Esencialmente,  $\gamma$  mide la intensidad de los efectos cooperativos entre  $u$  y  $v$ . De acuerdo con el Teorema 3.2(a), cuando los efectos cooperativos son suficientemente pequeños, medidos por  $\gamma \leq (\sigma_1 - \lambda)^2$ , las dos especies son conducidas a la extinción. Por el Teorema 3.2(b), cuando los efectos cooperativos toman niveles intermedios, medidos por  $(\sigma_1 - \lambda)^2 < \gamma < \Sigma(\lambda)$ , las dos especies persisten aproximándose a un estado de coexistencia cuando el tiempo se acerca a infinito. Finalmente, debido al Teorema 3.2(c), cuando los efectos cooperativos son suficientemente altos, medidos por  $\gamma \geq \Sigma(\lambda)$ , las poblaciones de ambas especies explotan cuando el tiempo se aproxima a infinito. Como resultará aparente más adelante, esta última fenomenología no puede ocurrir si  $a(x) > 0$  para todo  $x \in \bar{\Omega}$  (cf. Teoremas 3.8 y 3.10).

Conjeturamos que, cuando  $\gamma$  se aproxima al valor crítico  $\Sigma(\lambda)$ , el estado de coexistencia explota uniformemente en subconjuntos compactos de  $\Omega$ . Por lo tanto, las metasoluciones no triviales no parecen jugar un papel relevante en la descripción de la dinámica de (3.1.1), la cual parece comportarse de una manera diferente a como lo hizo para el problema (2.1.1) en el Capítulo 2 de esta Tesis.

El problema (3.1.7) puede ser formulado adoptando una perspectiva un tanto diferente. De hecho, supongamos que  $\lambda < \sigma_1$ . Entonces, a partir de la  $v$ -ecuación llegamos a que

$$v = \beta(-\Delta - \lambda)^{-1}u$$

y sustituyéndola en la  $u$ -ecuación, resulta que  $u$  debe satisfacer el problema no-local

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + \alpha\beta(-\Delta - \lambda)^{-1}u - a(x)f(x, u)u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1.11)$$

lo que puede ser representado como una *perturbación no-local* del problema logístico generalizado

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - a(x)f(x, u)u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1.12)$$

haciendo tender a 0 el producto  $\alpha\beta$ . Como (3.1.11) admite una solución positiva sí, y sólo si (3.1.7) posee un estado de coexistencia, de acuerdo con el Teorema 3.1, (3.1.11) posee una solución positiva sí, y sólo si (3.1.10) es satisfecha.

Este capítulo es distribuido como sigue. La Sección 3.2 discute algunas propiedades importantes de la *cota espectral*  $\Sigma(\lambda)$  introducida en (3.1.9). La Sección 3.3 caracteriza la existencia de estados de coexistencia para los casos (A) y (C). La Sección 3.4 averigua el comportamiento límite de los estados de coexistencia cuando  $\gamma$  se aproxima a  $(\sigma_1 - \lambda)^2$  y  $\Sigma(\lambda)$ . Finalmente, la Sección 3.5 prueba el Teorema 3.2, averiguando la dinámica de (3.1.1).

## 3.2 Propiedades elementales de $\Sigma(\lambda)$

El principal resultado de esta sección es la siguiente estimación de  $\Sigma(\lambda)$  (ver (3.1.9)).

**Proposición 3.3** *Suponemos (A) y  $\lambda < \sigma_1$ . Entonces,*

$$(\sigma_1 - \lambda)^2 < \Sigma(\lambda) \leq (\sigma_1^0 - \lambda)^2. \quad (3.2.1)$$

**Demostración.** A continuación, para cualquier  $w \in \mathcal{P}$  (ver (3.1.9)), ponemos

$$\mathfrak{J}(w) := \inf_{\Omega_0} \frac{(-\Delta - \lambda)w}{(-\Delta - \lambda)^{-1}w} \in \mathbb{R}. \quad (3.2.2)$$

Entonces, por definición,

$$\Sigma(\lambda) := \sup_{w \in \mathcal{P}} \mathfrak{J}(w). \quad (3.2.3)$$

Sea  $\phi_1 \gg 0$  una autofunción principal asociada con  $\sigma_1 = \sigma[-\Delta, \Omega]$ . Entonces,

$$\mathfrak{J}(\phi_1) = (\sigma_1 - \lambda)^2$$

y, por tanto,

$$(\sigma_1 - \lambda)^2 \leq \Sigma(\lambda).$$

Con el fin de probar que esta desigualdad es estricta, suponemos que

$$\mathfrak{J}(\phi_1) = (\sigma_1 - \lambda)^2 = \Sigma(\lambda)$$

y consideramos una función auxiliar de la forma

$$\hat{\phi}_1 := \begin{cases} \phi_1 & \text{en } \bar{\Omega}_0, \\ \psi & \text{en } \Omega_+, \end{cases}$$

donde  $\psi$  sea cualquier extensión- $\mathcal{C}^{2+\nu}$  de  $\phi_1$  fuera de  $\Omega_0$  tal que  $\psi = 0$  en  $\partial\Omega$  y

$$\psi < \phi_1 \quad \text{en} \quad \Omega_+.$$

La figura 3.2 muestra un esquema de la construcción de  $\hat{\phi}_1$  a través de un corte de  $\Omega$  que no interseque  $\Gamma_2$ . Como  $(-\Delta - \lambda)^{-1}$  es fuertemente positivo en  $\Omega$  y  $\hat{\phi}_1 < \phi_1$  en  $\Omega$ , tenemos que

$$(-\Delta - \lambda)^{-1}(\hat{\phi}_1) \ll (-\Delta - \lambda)^{-1}(\phi_1). \quad (3.2.4)$$

Además,

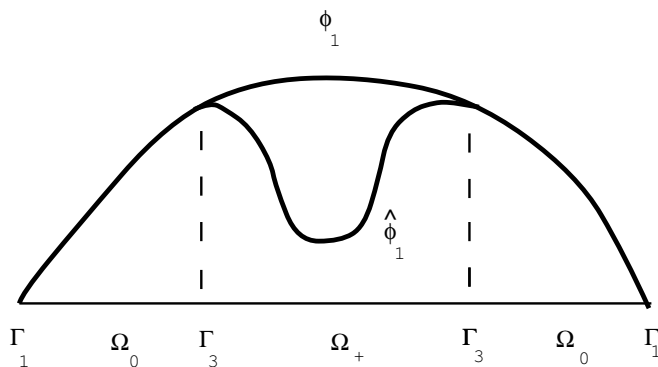


Figura 3.2: Construcción de  $\hat{\phi}_1$ .

$$(-\Delta - \lambda)(\hat{\phi}_1) = (-\Delta - \lambda)(\phi_1) = (\sigma_1 - \lambda)\phi_1 \quad \text{en } \Omega_0.$$

De esta manera,

$$\mathfrak{J}(\hat{\phi}_1) > \mathfrak{J}(\phi_1) = (\sigma_1 - \lambda)^2,$$

y, por lo tanto,

$$\Sigma(\lambda) > (\sigma_1 - \lambda)^2,$$

lo que es una contradicción. Esto prueba la primera estimación de (3.2.1). Para probar la segunda, procederemos de nuevo por contradicción. Supongamos

$$\Sigma(\lambda) > (\sigma_1^0 - \lambda)^2 \quad (3.2.5)$$

( $\Sigma(\lambda) = \infty$  puede ocurrir). Entonces, existen  $\varepsilon > 0$  y  $w \in \mathcal{P}$  tal que

$$\frac{(-\Delta - \lambda)w}{(-\Delta - \lambda)^{-1}w} \geq \mathfrak{J}(w) > (\sigma_1^0 - \lambda)^2 + \varepsilon \quad \text{en } \Omega_0,$$

y, por tanto,

$$(-\Delta - \lambda)w \geq [(\sigma_1^0 - \lambda)^2 + \varepsilon] (-\Delta - \lambda)^{-1}w \quad \text{en } \Omega_0. \quad (3.2.6)$$

A continuación, ponemos

$$u := (-\Delta - \lambda)^{-1}w.$$

Entonces,  $u \in \mathcal{P}$ ,

$$w = (-\Delta - \lambda)u \quad \text{en } \Omega,$$

y (3.2.6) puede ser expresada como

$$(-\Delta - \lambda)^2 u \geq [(\sigma_1^0 - \lambda)^2 + \varepsilon] u \quad \text{en } \Omega_0,$$

o, equivalentemente,

$$\left( -\Delta - \lambda - \sqrt{(\sigma_1^0 - \lambda)^2 + \varepsilon} \right) \left( -\Delta - \lambda + \sqrt{(\sigma_1^0 - \lambda)^2 + \varepsilon} \right) u \geq 0 \quad (3.2.7)$$

en  $\Omega_0$ . Por consiguiente, poniendo

$$\Upsilon := \left( -\Delta - \lambda + \sqrt{(\sigma_1^0 - \lambda)^2 + \varepsilon} \right) u,$$

(3.2.7) muestra que

$$\left( -\Delta - \lambda - \sqrt{(\sigma_1^0 - \lambda)^2 + \varepsilon} \right) \Upsilon \geq 0 \quad \text{en } \Omega_0. \quad (3.2.8)$$

Por construcción, tenemos que

$$\Upsilon = (-\Delta - \lambda)u + \sqrt{(\sigma_1^0 - \lambda)^2 + \varepsilon} u = w + \sqrt{(\sigma_1^0 - \lambda)^2 + \varepsilon} u \in \mathcal{P}.$$

En particular,  $\Upsilon > 0$  en  $\partial\Omega_0$  y, por tanto, de acuerdo con (3.2.8),  $\Upsilon$  será una supersolución positiva estricta de  $-\Delta - \lambda - \sqrt{(\sigma_1^0 - \lambda)^2 + \varepsilon}$  en  $\Omega_0$ . Por lo tanto, por el Teorema 1.2,

$$0 < \sigma \left[ -\Delta - \lambda - \sqrt{(\sigma_1^0 - \lambda)^2 + \varepsilon}, \Omega_0 \right] = \sigma_1^0 - \lambda - \sqrt{(\sigma_1^0 - \lambda)^2 + \varepsilon},$$

lo cual es una contradicción. Esto completa la demostración. ■



**Observación 3.4** Volviendo a la demostración de la Proposición 3.3, resulta aparente que para cada  $w \in \mathcal{P}$  existe  $\hat{w} \in \mathcal{P}$  tal que

$$\hat{w} < w \quad \text{en } \Omega_+ \quad \text{y} \quad \hat{w} = w \quad \text{en } \Omega_0.$$

Necesariamente, por el Principio del Máximo Fuerte y el Lema de Hopf, tenemos que

$$\mathfrak{J}(\hat{w}) > \mathfrak{J}(w)$$

y, por consiguiente,  $\Sigma(\lambda)$  no puede ser alcanzado en  $\mathcal{P}$ .

Como el funcional  $\mathfrak{J}$  está bien definido para clases bastante generales de funciones no-suaves, como, por ejemplo, para

$$w \in W := \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}_0) \cup L^\infty(\Omega_+),$$

gracias a la Observación 3.4, resulta aparente que, entre todas las funciones  $w \in W$  con una restricción fijada  $w|_{\Omega_0}$ , la única que maximiza  $\mathfrak{J}$  viene dada a través de

$$\tilde{w} := \begin{cases} w|_{\Omega_0} & \text{en } \bar{\Omega}_0, \\ 0 & \text{en } \Omega_+, \end{cases} \quad (3.2.9)$$

que ha sido representada en la figura 3.3. Aunque el hecho que  $\mathfrak{J}$  alcanza  $\Sigma(\lambda)$  en algún  $\tilde{w}$  no

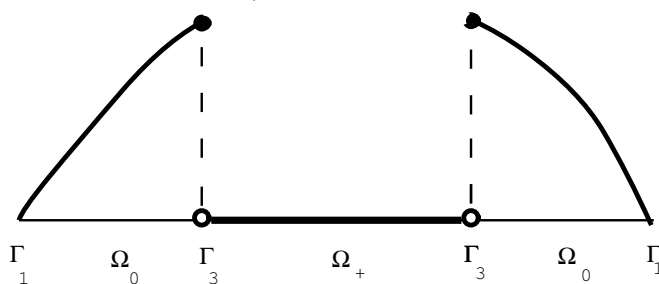


Figura 3.3: Función  $\tilde{w}$ .

será probado aquí, es extremadamente importante señalar que, en tal caso, la segunda estimación de (3.2.1) debe ser estricta. De forma más precisa, el siguiente resultado es satisfecho.

**Proposición 3.5** Suponemos (A),  $\lambda < \sigma_1$ , y existe  $w \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}_0)$  con  $w|_{\partial\Omega} = 0$  para el cual la  $\tilde{w}$  definida por (3.2.9) satisface  $\mathfrak{J}(\tilde{w}) = \Sigma(\lambda)$ . Entonces,

$$\Sigma(\lambda) < (\sigma_1^0 - \lambda)^2. \quad (3.2.10)$$

**Demostración.** Por la Proposición 3.3,

$$\mathfrak{J}(\tilde{w}) = \Sigma(\lambda) > (\sigma_1 - \lambda)^2 > 0.$$

Además,  $(-\Delta - \lambda)^{-1}\tilde{w} \gg 0$ . De esta manera,

$$(-\Delta - \lambda)w > 0 \quad \text{en } \Omega_0$$

y, debido al Teorema 1.2,  $w \gg 0$  en  $\Omega_0$ . Señalar que  $w$  podría anularse a largo de  $\Gamma_3$ , o no (ver la Figura 3.3). Para probar (3.2.10) razonaremos por contradicción. Supongamos que

$$\mathfrak{J}(\tilde{w}) = (\sigma_1^0 - \lambda)^2.$$

Entonces,

$$(-\Delta - \lambda)w \geq (\sigma_1^0 - \lambda)^2(-\Delta - \lambda)^{-1}\tilde{w} \quad \text{en } \Omega_0$$

y, por tanto, poniendo

$$u := (-\Delta - \lambda)^{-1}\tilde{w},$$

tenemos  $u \in \mathcal{P}$ ,

$$\tilde{w} = (-\Delta - \lambda)u \quad \text{c.s.p. en } \Omega,$$

y

$$(-\Delta - \lambda)^2 u \geq (\sigma_1^0 - \lambda)^2 u \quad \text{en } \Omega_0.$$

Equivalentemente,

$$(-\Delta - \sigma_1^0)(-\Delta + \sigma_1^0 - 2\lambda)u \geq 0 \quad \text{en } \Omega_0,$$

o

$$(-\Delta - \sigma_1^0)\Upsilon \geq 0 \quad \text{en } \Omega_0, \quad \Upsilon := (-\Delta + \sigma_1^0 - 2\lambda)u.$$

Como

$$\Upsilon = w + (\sigma_1^0 - \lambda)u \gg 0 \quad \text{en } \Omega_0$$

y  $\Upsilon|_{\Gamma_3} > 0$ ,  $\Upsilon$  será una supersolución positiva estricta de  $-\Delta - \sigma_1^0$  en  $\Omega_0$ . De esta manera,

$$0 < \sigma[-\Delta - \sigma_1^0, \Omega_0] = \sigma_1^0 - \sigma_1^0 = 0,$$

por el Teorema 1.2. Esta contradicción finaliza la demostración. ■

La validez de (3.2.10) es también corroborada por las identidades

$$\Sigma(\lambda) = \sup_{u \in (-\Delta - \lambda)^{-1}(\mathcal{P})} \inf_{\Omega_0} \frac{(-\Delta - \lambda)^2 u}{u} \quad (3.2.11)$$

y

$$(\sigma_1^0 - \lambda)^2 = \sup_{u \in \mathcal{P}} \inf_{\Omega_0} \frac{(-\Delta - \lambda)^2 u}{u}. \quad (3.2.12)$$

La primera es una consecuencia directa de la definición de  $\Sigma(\lambda)$ , mientras (3.2.12) es un resultado clásico (ver [38, Teorema 3.1] y las referencias allí incluidas). Como en (3.2.11) uno tiene que evaluar las cantidades de las funciones  $u$  de la forma  $u = (-\Delta - \lambda)^{-1}w$  para algún  $w \gg 0$ , necesariamente

$$-\Delta u = \lambda u + w > 0 \quad \text{si } \lambda \geq 0,$$

y, por lo tanto,  $u$  debe ser cóncava. Por lo que, no se puede aproximar por cualquier aproximación suave positiva de la autofunción principal asociada con  $\sigma_1^0$ , como las utilizadas en (3.2.12) para aproximar  $(\sigma_1^0 - \lambda)^2$ .

### 3.3 Existencia de los estados de coexistencia

En esta sección obtendremos una condición necesaria para la existencia de los estados de coexistencia. Con el fin de lograr dicho objetivo debería ser observado que supuesto un subdominio abierto  $D$  y debido a la Sección 2.3, si  $f$  satisface (2.3.1), (B3-4),  $h_1, h_2 \in \mathcal{C}^{2+\nu}(\partial D)$ ,  $(h_1, h_2) \geq (0, 0)$  y  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathcal{C}^{2+\nu}(\bar{D}) \times \mathcal{C}^{2+\nu}(\bar{D})$  es una supersolución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + \alpha v - af(\cdot, u)u & \text{en } D, \\ -\Delta v = \beta u + \lambda v & \\ (u, v) = (h_1, h_2) & \text{en } \partial D, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

con  $\bar{u} > 0$  y  $\bar{v} > 0$  entonces,

$$\bar{u} \gg 0, \quad \text{y} \quad \bar{v} \gg 0, \quad \text{en } D.$$

En particular, cualquier solución no-negativa  $(u, v) \neq (0, 0)$  de (3.3.1) satisface  $u \gg 0$  y  $v \gg 0$ . Además,

$$\lambda \leq \sigma[\mathcal{L}(af(\cdot, \bar{u}), 0), D],$$

y, para cada  $\kappa > 1$ , el par  $(\kappa\bar{u}, \kappa\bar{v})$  también será una supersolución de (3.3.1). Si, además,  $(h_1, h_2) = (0, 0)$  y  $(\bar{u}, \bar{v})$  resuelve (3.3.1), entonces

$$\lambda = \sigma[\mathcal{L}(af(\cdot, \bar{u}), 0), D]. \quad (3.3.2)$$

Por otro lado, gracias al Teorema 2.11, cuando  $h_1 = h_2 = 0$ , (3.3.1) tiene un único estado de coexistencia si  $\lambda > \sigma[\mathcal{L}_0, D]$ , denotado por  $\Theta$ . También, siempre que  $u_0 > 0$  y  $v_0 > 0$ , obtendremos lo siguiente

$$\lim_{t \uparrow \infty} \|(u(\cdot, t; u_0, v_0), v(\cdot, t; u_0, v_0)) - \Theta\|_{\mathcal{C}(\bar{D}) \times \mathcal{C}(\bar{D})} = 0,$$

donde  $(u(x, t; u_0, v_0), v(x, t; u_0, v_0))$  representa la única solución de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \lambda u + \alpha v - af(\cdot, u)u & \text{en } D \times (0, \infty), \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \beta u + \lambda v & \text{en } D \times (0, \infty), \\ (u, v) = (h_1, h_2) & \text{en } \partial D \times (0, \infty), \\ (u(\cdot, 0), v(\cdot, 0)) = (u_0, v_0) & \text{en } D. \end{cases}$$

Además, si  $h_1 = h_2 = 0$  y  $\lambda \leq \sigma[\mathfrak{L}_0, D]$ , entonces (3.3.1) no puede admitir una subsolución positiva, y

$$\lim_{t \uparrow \infty} \| (u(\cdot, t; u_0, v_0), v(\cdot, t; u_0, v_0)) \|_{C(\bar{D}) \times C(\bar{D})} = 0.$$

Por consiguiente, el siguiente resultado nos proporciona una condición necesaria óptima para la existencia de un estado de coexistencia. Su optimalidad será mostrada más adelante.

**Proposición 3.6** *Supongamos que  $a > 0$ ,  $f$  satisface (B3), y (3.3.1) posee una solución*

$$(u, v) > (0, 0).$$

*Entonces,  $u \gg 0$ ,  $v \gg 0$ , y*

$$0 < \sigma_1 - \lambda < \sqrt{\alpha\beta}. \quad (3.3.3)$$

*Si, además,  $a(x)$  satisface la condición (A), entonces*

$$0 < \sigma_1 - \lambda < \sqrt{\alpha\beta} < \sqrt{\Sigma(\lambda)}, \quad (3.3.4)$$

*donde  $\Sigma(\lambda)$  es la cota espectral definida en (3.1.9).*

**Demostración.** Supongamos que  $a > 0$  y  $f$  satisface (B3). Sea  $(u, v) > (0, 0)$  una solución de (3.3.1). Entonces, de acuerdo con el Lema 2.9, tenemos que  $u \gg 0$  y  $v \gg 0$ . Además,

$$\begin{pmatrix} -\Delta + af(\cdot, u) & -\alpha \\ -\beta & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

y, por tanto, por la unicidad del autovalor principal,

$$\lambda = \sigma[\mathfrak{L}(af(\cdot, u), 0), \Omega].$$

En realidad, esto es obtenido a partir de (3.3.2) gracias al Lema 2.9. Como  $af(\cdot, u) > 0$ , por (3.1.6) y la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial, Proposición 1.3(a), llegamos a que

$$\lambda > \sigma[\mathfrak{L}(0, 0), \Omega] = \sigma[\mathfrak{L}_0, \Omega] = \sigma_1 - \sqrt{\alpha\beta}.$$

Además, ya que  $v = 0$  en  $\partial\Omega$  y

$$(-\Delta - \lambda)v = \beta u > 0 \quad \text{en } \Omega,$$

por el Teorema 1.2 tenemos que

$$0 < \sigma[-\Delta - \lambda, \Omega] = \sigma_1 - \lambda,$$

lo que completa la demostración de (3.3.3).

Una vez sabemos que  $\lambda < \sigma_1$ , a partir de la  $v$ -ecuación de (3.1.7) tendremos que

$$v = \beta(-\Delta - \lambda)^{-1}u$$

y, por tanto, substituyéndolo en la  $u$ -ecuación, llegamos a que

$$(-\Delta - \lambda)u = \alpha\beta(-\Delta - \lambda)^{-1}u - af(\cdot, u)u.$$

Por lo tanto,

$$(-\Delta - \lambda)u = \alpha\beta(-\Delta - \lambda)^{-1}u \quad \text{en } \Omega_0,$$

puesto que  $a = 0$  en  $\Omega_0$ , y, por eso,

$$\mathfrak{J}(u) = \inf_{\Omega_0} \frac{(-\Delta - \lambda)u}{(-\Delta - \lambda)^{-1}u} = \alpha\beta.$$

Por consiguiente,

$$\alpha\beta \leq \Sigma(\lambda). \quad (3.3.5)$$

Claramente, (3.3.4) es una consecuencia de (3.3.3), (3.3.5), y el siguiente lema, cuya prueba es pospuesta hasta la conclusión de esta demostración.

**Lema 3.7** *Suponemos que  $a > 0$  en  $\Omega$ ,  $f \in C^{\nu, 1+\nu}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$  satisface (B3), y (3.1.7) posee un estado de coexistencia. Entonces, existe  $\varepsilon > 0$  tal que el problema perturbado*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + (\alpha + t)v - af(\cdot, u)u & \text{en } \Omega, \\ -\Delta v = \beta u + \lambda v & \text{en } \Omega, \\ (u, v) = (0, 0) & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.3.6)$$

*tiene un estado de coexistencia para cada  $t \in [0, \varepsilon)$ .*

De acuerdo con (3.3.5), si (3.3.4) no es cierta, entonces

$$\alpha\beta = \Sigma(\lambda).$$

Por otro lado, por el Lema 3.7 y el análisis ya realizado en esta demostración,

$$(\alpha + t)\beta \leq \Sigma(\lambda) \quad \forall t \in [0, \varepsilon).$$

Esta contradicción muestra que  $\alpha\beta < \Sigma(\lambda)$  y concluye la demostración. ■

**Demostración del Lema 3.7.** Esta prueba consiste en una simple aplicación del Teorema de la Función Implícita basado en el hecho de que cualquier estado de coexistencia de (3.1.7) es *no-degenerado*. Sea  $(u_0, v_0)$  un estado de coexistencia de (3.1.7) y consideramos el operador

$$\mathfrak{F} : E := \mathcal{C}_0^{2+\nu}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{2+\nu}(\bar{\Omega}) \times \mathbb{R} \longrightarrow F := \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega})$$

definido por

$$\mathfrak{F}(u, v, t) := \begin{pmatrix} -\Delta u - \lambda u - (\alpha + t)v + af(\cdot, u)u \\ -\Delta v - \lambda v - \beta u \end{pmatrix}, \quad (u, v, t) \in E. \quad (3.3.7)$$

$\mathfrak{F}$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  y, por definición,

$$\mathfrak{F}(u_0, v_0, 0) = 0.$$

Además, el operador diferencial

$$D_0\mathfrak{F} := D_{(u,v)}\mathfrak{F}(u_0, v_0, 0) \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_0^{2+\nu}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{2+\nu}(\bar{\Omega}); \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega}))$$

viene dado por

$$\begin{aligned} D_0\mathfrak{F} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\Delta - \lambda + a\partial_u f(\cdot, u_0)u_0 + af(\cdot, u_0) & -\alpha \\ -\beta & -\Delta - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \mathfrak{L}(-\lambda + a\partial_u f(\cdot, u_0)u_0 + af(\cdot, u_0), -\lambda) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde  $\mathfrak{L}(\cdot, \cdot)$  representa el *operador cooperativo* lineal definido en (3.1.3). De acuerdo con la suposición (A), la condición (B3), y el Lema 2.9, tenemos que por la monotonía del autovalor principal con respecto al potencial

$$\begin{aligned} &\sigma[\mathfrak{L}(-\lambda + a\partial_u f(\cdot, u_0)u_0 + af(\cdot, u_0), -\lambda), \Omega] \\ &= \sigma[\mathfrak{L}(a\partial_u f(\cdot, u_0)u_0 + af(\cdot, u_0), 0), \Omega] - \lambda \\ &> \sigma[\mathfrak{L}(af(\cdot, u_0), 0), \Omega] - \lambda = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, debido al Teorema 1.2, el operador linealizado  $D_0\mathfrak{F}$  es un isomorfismo con inversa fuertemente positiva, y, consecuentemente, gracias al Teorema de la Función Implícita, existen  $\varepsilon > 0$  y dos aplicaciones de clase  $\mathcal{C}^1$

$$U, V : (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \mathcal{C}_0^{2+\nu}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{2+\nu}(\bar{\Omega})$$

tal que

$$U(0) = u_0, \quad V(0) = v_0,$$

y

$$\mathfrak{F}(U(t), V(t), t) = 0 \quad \text{para cada } t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (3.3.8)$$

Como  $u_0$  y  $v_0$  se encuentran en el interior del cono de las funciones positivas del espacio de Banach ordenado  $\mathcal{C}_0^1(\bar{\Omega})$ , resulta aparente que  $(U(t), V(t))$  es un estado coexistencia de (3.3.6) para  $t > 0$  suficientemente pequeño. Esto completa la demostración. ■

### 3.3.1 Caracterización de la existencia de los estados de coexistencia en el caso (C)

El principal resultado de existencia para este caso es el siguiente:

**Teorema 3.8** *Supongamos que  $a(x) > 0$  para cada  $x \in \bar{\Omega}$  y  $f$  satisface (B3-4) y (2.1.4). Entonces, (3.1.7) tiene un estado de coexistencia sí, y sólo si  $\lambda$  satisface (3.3.3), y es único si existe.*

**Demostración.** Por la Proposición 3.6, ya es sabido que la condición (3.3.3) es necesaria para la existencia de un estado de coexistencia. Supongamos que (3.3.3). Como ya es conocido, de acuerdo con el Teorema 2.11, para probar la existencia y la unicidad de los estados de coexistencia es suficiente construir una supersolución  $(\bar{u}, \bar{v})$  de (3.1.7) con  $\bar{u} > 0$  y  $\bar{v} > 0$ . Podemos elegir  $\bar{u}$  de forma que sea una constante positiva  $M > 0$  suficientemente grande, y  $\bar{v}$  la única solución positiva de

$$(-\Delta - \lambda)\bar{v} = \beta\bar{u} = \beta M \quad \text{en } \Omega, \quad \bar{v}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Dicho de otra manera,

$$\bar{u} := M, \quad \bar{v} = \beta M(-\Delta - \lambda)^{-1}(1).$$

Señalar que  $(-\Delta - \lambda)^{-1}$  existe porque  $\lambda < \sigma_1$ . Por construcción, el par  $(\bar{u}, \bar{v})$  será una supersolución de (3.1.7) sí, y sólo si

$$0 \geq \lambda M + \alpha\beta M(-\Delta - \lambda)^{-1}(1) - af(\cdot, M)M \quad \text{en } \Omega,$$

i.e., si

$$af(\cdot, M) \geq \lambda + \alpha\beta(-\Delta - \lambda)^{-1}(1) \quad \text{en } \Omega. \quad (3.3.9)$$

Como  $a$  está alejado de cero, a partir de (2.1.4) resulta aparente que (3.3.9) sea obtenido para  $M > 0$  suficientemente grande. Esto completa la demostración. ■

### 3.3.2 Caracterización de la existencia en el caso (A)

En el caso (A), nuestro principal resultado de existencia es el Teorema 3.1. De acuerdo con este teorema, las estimaciones (3.3.4) no son sólo necesarias sino también suficientes para la existencia de un estado de coexistencia de (3.1.7). Además, el estado de coexistencia es único si existe. Por la Proposición 3.6 y el Teorema 2.11, para probar el Teorema 3.1 es suficiente mostrar que bajo la condición

$$0 < \sigma_1 - \lambda < \sqrt{\alpha\beta} < \sqrt{\Sigma(\lambda)},$$

(3.1.7) posee una supersolución  $(\bar{u}, \bar{v})$  con  $\bar{u} > 0$  y  $\bar{v} > 0$ . Señalar que la estimación  $\lambda < \sigma_1$  entraña que  $\Sigma(\lambda)$  esté bien definida, y que  $\sigma_1 - \lambda < \sqrt{\alpha\beta}$  pueda ser equivalentemente escrita de la forma

$$\lambda > \sigma[\mathfrak{L}_0, \Omega] = \sigma_1 - \sqrt{\alpha\beta}.$$

Por consiguiente, implica que el estado trivial  $(0, 0)$  es linealmente inestable. En tal caso, (3.1.7) admite subsoluciones positivas arbitrariamente pequeñas como fue mostrado en la Sección 2.3 del Capítulo 2. La existencia de la supersolución está garantizada una vez que

$$\alpha\beta < \Sigma(\lambda). \quad (3.3.10)$$

De hecho, bajo esta estimación, existen  $u \gg 0$  en  $\Omega$  y  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\inf_{\Omega_0} \frac{(-\Delta - \lambda)u}{(-\Delta - \lambda)^{-1}u} > \alpha\beta + \varepsilon. \quad (3.3.11)$$

Posteriormente, para  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, ponemos

$$\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega_0) < \delta\}.$$

Por continuidad, a partir de (3.3.11) tenemos que existe  $\delta > 0$  tal que

$$(-\Delta - \lambda)u \geq \alpha\beta(-\Delta - \lambda)^{-1}u \quad \text{en } \Omega_\delta.$$

De esta manera, para cada  $\kappa > 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (-\Delta - \lambda)(\kappa u) &\geq \alpha\beta(-\Delta - \lambda)^{-1}(\kappa u) \\ &\geq \alpha\beta(-\Delta - \lambda)^{-1}(\kappa u) - af(\cdot, \kappa u)\kappa u \quad \text{en } \Omega_\delta, \end{aligned}$$

porque

$$af(\cdot, \kappa u)\kappa u \geq 0.$$

Además, de acuerdo con (2.1.4) y la suposición (A), existe  $\kappa_0 > 0$  tal que

$$(-\Delta - \lambda)u \geq \alpha\beta(-\Delta - \lambda)^{-1}u - af(\cdot, \kappa u)u \quad \text{en } \bar{\Omega}_+ \setminus \Omega_\delta$$

para cada  $\kappa \geq \kappa_0$ , puesto que  $a(x)$  es positiva y alejada de cero en  $\bar{\Omega}_+ \setminus \Omega_\delta$ . Por lo tanto, el par positivo en cada componente

$$(\bar{u}, \bar{v}) := \kappa_0 (u, \beta(-\Delta - \lambda)^{-1}u)$$

nos proporciona la supersolución requerida de (3.1.7) en  $\Omega$ . Esto completa la demostración del Teorema 3.1.



### 3.4 Comportamiento límite de los estados de coexistencia

En esta sección vamos a considerar los estados de equilibrio del problema (3.1.7) dependientes del parámetro real  $\alpha > 0$  con el fin de analizar como varia su (único) estado de coexistencia cuando  $\alpha$  se acerca a los valores límites para los cuales tenemos la existencia. Resultados similares pueden ser obtenidos variando tanto  $\beta$ , como  $\lambda$ . Fijando  $\alpha$  como el principal parámetro de continuación, denotaremos mediante

$$\Theta(\alpha) := (u(\alpha), v(\alpha))$$

al único estado de coexistencia de (3.1.7); el cual será un cero del operador

$$\mathfrak{F} : E := \mathcal{C}_0^{2+\nu}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}_0^{2+\nu}(\bar{\Omega}) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}^\nu(\bar{\Omega})$$

definido por

$$\mathfrak{F}(u, v, \alpha) := \begin{pmatrix} -\Delta u - \lambda u - \alpha v + af(\cdot, u)u \\ -\Delta v - \lambda v - \beta u \end{pmatrix}, \quad (u, v, \alpha) \in E. \quad (3.4.1)$$

Además, tan pronto como  $a > 0$  en  $\Omega$  y (3.1.7) admita un estado de coexistencia, el Teorema de la Función Implícita de la misma manera a como fue aplicado en la demostración de la Proposición 3.6 muestra que

$$\alpha \mapsto (u(\alpha), v(\alpha))$$

es una aplicación de clase  $\mathcal{C}^1$ , y, debido al Lema 2.13, creciente. En realidad, por el Teorema de la Función Implícita, podemos derivar la identidad

$$\mathfrak{F}(u(\alpha), v(\alpha), \alpha) = 0$$

con respecto a  $\alpha$  obteniendo que

$$D_{(u,v)}\mathfrak{F}(u(\alpha), v(\alpha), \alpha)D_\alpha(u(\alpha), v(\alpha)) + D_\alpha\mathfrak{F}(u(\alpha), v(\alpha), \alpha) = 0.$$

De acuerdo con la demostración de la Proposición 3.6, ya es sabido que el operador

$$D_\alpha\mathfrak{F} := D_{(u,v)}\mathfrak{F}(u(\alpha), v(\alpha), \alpha)$$

es invertible, y que  $(D_\alpha\mathfrak{F})^{-1}$  es fuertemente positivo. Además, derivando con respecto a  $\alpha$  el operador (3.4.1) muestra que

$$D_\alpha\mathfrak{F}(u(\alpha), v(\alpha), \alpha) = -v(\alpha).$$

Por lo tanto,

$$D_\alpha(u(\alpha), v(\alpha)) = (D_\alpha\mathfrak{F})^{-1}v(\alpha) \gg 0. \quad (3.4.2)$$

En particular, considerando  $\alpha$  como el principal parámetro de continuación, la estructura del conjunto de estados de coexistencia de (3.1.7) consta de una curva creciente de clase  $\mathcal{C}^1$

$$\alpha \mapsto (u(\alpha), v(\alpha)), \quad \alpha \in \mathcal{I},$$

donde  $\mathcal{I}$  representa el intervalo de existencia del estado de coexistencia, i.e.,

$$\mathcal{I} := \begin{cases} ((\sigma_1 - \lambda)^2/\beta, \infty), & \text{en el caso (C),} \\ ((\sigma_1 - \lambda)^2/\beta, \Sigma(\lambda)/\beta), & \text{en el caso (A).} \end{cases}$$

El siguiente resultado nos proporciona el comportamiento límite de los estados de coexistencia en la parte final del intervalo de existencia  $\mathcal{I}$ .

$$\alpha_0 := (\sigma_1 - \lambda)^2/\beta \quad \text{y} \quad \alpha_1 := \begin{cases} \infty, & \text{en el caso (C),} \\ \Sigma(\lambda)/\beta, & \text{en el caso (A).} \end{cases} \quad (3.4.3)$$

**Proposición 3.9** *Supongamos que  $a(x)$  satisface (3.1.2) y alguna de las condiciones (A) o (C), y  $f$  satisface (B3) y (2.1.4). Entonces,*

$$\lim_{\alpha \downarrow \alpha_0} \left( \|u(\alpha)\|_{C(\bar{\Omega})} + \|v(\alpha)\|_{C(\bar{\Omega})} \right) = 0 \quad (3.4.4)$$

y

$$\lim_{\alpha \uparrow \alpha_1} \|u(\alpha)\|_{C(\bar{\Omega})} = \lim_{\alpha \uparrow \alpha_1} \|v(\alpha)\|_{C(\bar{\Omega})} = \infty. \quad (3.4.5)$$

**Demostración.** El hecho que  $(u(\alpha), v(\alpha))$  bifurque desde  $(0, 0)$  en el valor  $\alpha = \alpha_0$ , expresado por (3.4.4), es una sencilla consecuencia que se desprende de la monotonía de la aplicación

$$\alpha \mapsto (u(\alpha), v(\alpha))$$

el hecho que los ceros de  $\mathfrak{F}$  son puntos fijos de un operador compacto (cf. [40, Capítulo 7]), puesto que (3.1.7) no puede admitir un estado de coexistencia si  $\alpha \leq \alpha_0$ , por la Proposición 3.6. Como los detalles técnicos son bien conocidos (Sección 2.4 en el Capítulo 2 de esta Tesis), no son incluidos aquí. Señalar que  $f(x, u)$  no disfruta de las condiciones necesarias de regularidad para aplicar el Teorema de Bifurcación de Crandall y Rabinowitz [15], [16].

Ahora, probaremos (3.4.5). De acuerdo con (3.1.7), por un sencillo cálculo,

$$(-\Delta + \sqrt{\alpha\beta} - \lambda) \left( \sqrt{\alpha} v(\alpha) - \sqrt{\beta} u(\alpha) \right) = \sqrt{\beta} af(\cdot, u(\alpha))u(\alpha) \quad \text{en } \Omega$$

para cada  $\alpha \in \mathcal{I}$ . Por otro lado, por la Proposición 3.6,  $\lambda < \sigma_1$ , y, por tanto,

$$\sigma[-\Delta + \sqrt{\alpha\beta} - \lambda, \Omega] = \sigma_1 - \lambda + \sqrt{\alpha\beta} > \sqrt{\alpha\beta} > 0.$$

De esta manera, debido al Teorema 1.2, obtenemos que

$$\sqrt{\alpha} v(\alpha) = \sqrt{\beta} u(\alpha) + \sqrt{\beta}(-\Delta + \sqrt{\alpha\beta} - \lambda)^{-1} (af(\cdot, u(\alpha))u(\alpha))$$

y, por lo tanto,

$$\sqrt{\alpha} v(\alpha) > \sqrt{\beta} u(\alpha). \quad (3.4.6)$$

Por consiguiente, para probar (3.4.5) en el caso (A), es suficiente mostrar que

$$\lim_{\alpha \uparrow \alpha_1} \|u(\alpha)\|_{C(\bar{\Omega})} = \infty. \quad (3.4.7)$$

Supongamos que  $a(x)$  satisface (A) y (3.4.7) no es cierto. Entonces, por la monotonía de  $\alpha \mapsto u(\alpha)$ , existe una constante  $C > 0$  tal que

$$u(\alpha) \leq C \quad \text{en } \Omega, \quad \forall \alpha \in \mathcal{I}.$$

De esta manera, desde la  $v$ -ecuación de (3.1.7) llegamos a que

$$v(\alpha) = \beta(-\Delta - \lambda)^{-1}u(\alpha) \leq \beta C(-\Delta - \lambda)^{-1}(1) \quad \text{en } \Omega,$$

para todo  $\alpha$  en  $\mathcal{I}$ . Estas cotas a priori uniformes para  $u(\alpha)$  y  $v(\alpha)$  combinadas con la monotonía de  $(u(\alpha), v(\alpha))$ , a través de un argumento de compacidad ya mencionado con anterioridad, muestran que debería existir un estado de coexistencia

$$(u(\alpha_1), v(\alpha_1))$$

de (3.1.7) en  $\alpha = \alpha_1$ . Esto es imposible, porque  $\alpha_1 \notin \mathcal{I}$ . Por lo tanto, (3.4.5) se tiene en el caso (A).

Finalmente, suponemos que nos encontramos en el caso (C). Entonces,  $(u(\alpha), v(\alpha))$  es definido para todo  $\alpha > \alpha_0$  y, substituyendo (3.4.6) en la  $u$ -ecuación de (3.1.7) tenemos que, para cada  $\alpha > \alpha_0$ ,

$$\begin{aligned} -\Delta u(\alpha) &= \lambda u(\alpha) + \alpha v(\alpha) - af(\cdot, u(\alpha))u(\alpha) \\ &> \lambda u(\alpha) + \sqrt{\alpha\beta} u(\alpha) - af(\cdot, u(\alpha))u(\alpha) \\ &= \left(\lambda + \sqrt{\alpha\beta}\right) u(\alpha) - af(\cdot, u(\alpha))u(\alpha). \end{aligned}$$

De esta manera,  $u(\alpha)$  será una supersolución positiva estricta del problema auxiliar

$$\begin{cases} -\Delta w = (\lambda + \sqrt{\alpha\beta}) w - af(\cdot, w)w & \text{en } \Omega, \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.4.8)$$

Es bien conocido que (3.4.8) posee una solución positiva sí, y sólo si

$$\sqrt{\alpha\beta} > \sigma_1 - \lambda.$$

Además, es única si existe. La denotamos mediante  $w(\alpha)$ . Entonces, para  $\alpha > \alpha_0$  suficientemente grande, por el Lema 2.13, tenemos que

$$u(\alpha) > w(\alpha). \quad (3.4.9)$$

A continuación, denotamos por  $\varphi_1 \gg 0$  a la autofunción principal asociada con  $\sigma_1 = [-\Delta, \Omega]$  normalizada de forma que

$$\|\varphi_1\|_\infty = 1.$$

Un cálculo directo muestra que la función  $\underline{w}(\alpha) := C\varphi_1$  es una subsolución de (3.4.8) una vez que la constante  $C$  satisface

$$f(\cdot, C\varphi_1) \leq \frac{\lambda + \sqrt{\alpha\beta} - \sigma_1}{\|a\|_{C(\bar{\Omega})}} \quad \text{en } \Omega. \quad (3.4.10)$$

Por la monotonía y las propiedades de crecimiento de  $f$ , la mayor de todas las posibles constantes  $C$  que satisfagan (3.4.10), a la que llamaremos  $C(\alpha)$ , debe cumplir

$$\lim_{\alpha \uparrow \infty} C(\alpha) = \infty.$$

De esta manera, por el Lema 2.13, desde (3.4.9) obtenemos que

$$u(\alpha) > w(\alpha) \geq C(\alpha)\varphi_1 \quad (3.4.11)$$

y, en particular,

$$\lim_{\alpha \uparrow \infty} u(\alpha) = \infty \quad \text{uniformemente en subconjuntos compactos de } \Omega.$$

Finalmente, sustituyendo (3.4.11) en la  $v$ -ecuación de (3.1.7), resulta aparente que

$$v(\alpha) = \beta(-\Delta - \lambda)^{-1}u(\alpha) > \frac{C(\alpha)\beta}{\sigma_1 - \lambda}\varphi_1.$$

Esto completa la demostración. ■

### 3.5 Dinámica de las soluciones positivas de (3.1.1)

En esta sección mantendremos las notaciones introducidas en la Sección 3.4; en particular, (3.4.3). Su principal resultado puede ser establecido como sigue.

**Teorema 3.10** *Supongamos que  $a(x)$  satisface (3.1.2) y alguna de las condiciones (A) o (C), y  $f$  satisface (B3) y (2.1.4). Para cada  $\alpha > 0$ , denotamos*

$$(u_\alpha(x, t), v_\alpha(x, t))$$

*como la única solución de (3.1.1). Entonces,*

(a) Para cada  $\alpha \leq \alpha_0$ ,

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u_\alpha(x, t), v_\alpha(x, t)) = (0, 0).$$

(b) Para cada  $\alpha \in \mathcal{I}$ ,

$$\lim_{t \uparrow \infty} (u_\alpha(x, t), v_\alpha(x, t)) = (u(\alpha), v(\alpha)).$$

(c) Para cada  $\alpha \geq \alpha_1$ ,

$$\lim_{t \uparrow \infty} \|u_\alpha(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \lim_{t \uparrow \infty} \|v_\alpha(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \infty.$$

**Demostración.** Las afirmaciones (a) y (b) se obtienen directamente del Teorema 2.11. La parte (c) es una consecuencia del principio de comparación parabólico de tipo cooperativo, Proposición 2.12. De hecho, sea  $\alpha \geq \alpha_1$ . De esta manera, de acuerdo con la Proposición 2.12, para cada  $\varepsilon > 0$  tenemos que

$$u_\alpha \geq u_{\alpha_1 - \varepsilon} \quad \text{y} \quad v_\alpha \geq u_{\alpha_1 - \varepsilon} \quad \text{en } \Omega \times (0, \infty).$$

En particular, para cada  $t > 0$ , tenemos que

$$\begin{cases} \|u_\alpha(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \geq \|u_{\alpha_1 - \varepsilon}(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \\ \|v_\alpha(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \geq \|u_{\alpha_1 - \varepsilon}(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \end{cases} \quad \text{en } \Omega.$$

De esta manera, pasando al límite cuando  $t \uparrow \infty$  a partir del apartado (b) llegamos a que

$$\begin{aligned} \liminf_{t \uparrow \infty} \|u_\alpha(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} &\geq \lim_{t \uparrow \infty} \|u_{\alpha_1 - \varepsilon}(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \|u(\alpha_1 - \varepsilon)\|_{C(\bar{\Omega})}, \\ \liminf_{t \uparrow \infty} \|v_\alpha(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} &\geq \lim_{t \uparrow \infty} \|v_{\alpha_1 - \varepsilon}(\cdot, t)\|_{C(\bar{\Omega})} = \|v(\alpha_1 - \varepsilon)\|_{C(\bar{\Omega})}. \end{aligned}$$

Como esto es cierto para cada  $\varepsilon > 0$ , el resultado ahora se obtiene desde la Proposición 3.9 pasando al límite cuando  $\varepsilon \downarrow 0$  en las desigualdades anteriores. ■

# Bibliografía

- [1] P. Álvarez-Caudevilla and J. López-Gómez, Metasolutions in cooperative systems, *Nonl. Anal. RWA*. In press.
- [2] P. Álvarez-Caudevilla and J. López-Gómez, Semiclassical analysis for highly degenerate potentials, *Bull. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), 665–675.
- [3] P. Álvarez-Caudevilla and J. López-Gómez, Asymptotic behaviour of principal eigenvalues for a class of cooperative systems, *J. Diff. Equations.* **244**, 5, (2008), 1093 – 1113
- [4] A. Ambrosetti and J. L. Gámez, *Branches of positive solutions for some semilinear Schrödinger equations*, *Math. Z.* **224** (1997), 347–362.
- [5] H. Amann, On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems, *Ind. Univ. Math. J.* **21** (1971), 125–146.
- [6] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM Review* **18** (1976), 620–709.
- [7] H. Amann, *Maximum Principles and Principle Eigenvalues*, in “Ten Mathematical Essays on Approximation in Analysis and Topology” (J. Ferrera, J. López-Gómez, F. R. Ruiz del Portal, Eds.), pp. 1–60, Elsevier, Amsterdam 2005.
- [8] I. Babuška and R. Výborný, *Continuous dependence of eigenvalues on the domain*, *Czech. Math. J.* **a4** (1965), 169–178.
- [9] C. Bandle, J. von Below, and W. Reichel, Parabolic problems with dynamical boundary conditions: eigenvalue expansions and blow-up, *Atti. Accad. Naz. Lincei Al. Sci. Fis. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **17** (2006), 35–67.
- [10] J. Bourgain, *Eigenfunction bounds for compact manifolds with integrable geodesic flows*, IHES preprint, 1993.
- [11] H. Brezis and L. Oswald, Remarks on sublinear elliptic equations, *Nonl. Anal. TMA* **10** (1986), 55–64.

- [12] F. C. Cirstea and V. Radulescu, Existence and uniqueness of blow-up solutions for a class of logistic equations, *Comm. Contemp. Maths.* **4** (2002), 559–586.
- [13] F. C. Cirstea and V. Radulescu, Asymptotics for the blow-up boundary solution of the logistic equation with absorption, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **336** (2003), 231–236.
- [14] F. C. Cirstea and V. Radulescu, Extremal singular solutions for degenerate logistic-type equations in anisotropic media, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **339** (2004), 119–124.
- [15] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, *J. Funct. Anal.* **8** (1971), 321–340.
- [16] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation, perturbation from simple eigenvalues and linearized stability*, Arch. Rat. Mech. Anal. **52** (1973), 161–180.
- [17] E. N. Dancer, On the structure of solutions of non-linear eigenvalue problems, *Ind. Univ. Math. J.* **23** (1974), 1069–1076.
- [18] E. N. Dancer, Some remarks on classical problems and fine properties of Sobolev spaces. *Differential Integral Equations* **9** (1996), no. 3, 437–446.
- [19] E. N. Dancer, Bifurcation from simple eigenvalues and eigenvalues of geometric multiplicity one, *Bull. London Math. Soc.* **34** (2002), 533–538.
- [20] E. N. Dancer and J. López-Gómez, *Semiclassical analysis of general second order elliptic operators on bounded domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 3723–3742.
- [21] E. N. Dancer and Y. Du, *Effect of certain degeneracies in the predator-prey model*, SIAM J. Math. Anal., **34** (2002), 292–314.
- [22] M. A. Del Pino, *Positive solutions of a semilinear elliptic equation on a compact manifold*, Nonl. Anal. TMA **22** (1994), 1423–1430.
- [23] H. Donnelly, *Bounds for the eigenfunctions of the Laplacian on Compact Riemann manifolds*, J. Funct. Anal. **187** (2001), 247–261.
- [24] Y. Du, Effects of a degeneracy in the competition model. Classical and generalized steady-state solutions, *J. Diff. Eqns.* **181** (2002), 92–132.
- [25] Y. Du and Q. Huang, Blow-up solutions for a class of semilinear elliptic and parabolic equations, *SIAM J. Math. Anal.* **31** (1999), 1–18.
- [26] C. Faber, *Beweis das unter allen homogenen membranen von gleicher fläche und gleicher spannung die kreisförmige den tiefsten grundton gibt*, Sitzungsber. Bayer. Akad. der Wiss. Math. Phys. (1923), 169–172.

- 
- [27] D. G. de Figueiredo and E. Mitidieri, *Maximum principle for linear elliptic systems*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **b2** (1992), 36–66.
  - [28] J. M. Fraile, P. Koch-Medina, J. López-Gómez and S. Merino, Elliptic eigenvalue problems and unbounded continua of positive solutions of a semilinear elliptic equation, *J. Diff. Eqns.* **127** (1996), 295–319.
  - [29] J. García-Melián, R. Gómez-Reñasco, J. López-Gómez and J. C. Sabina de Lis, Pointwise growth and uniqueness of positive solutions for a class of sublinear elliptic problems where bifurcation from infinity occurs, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **145** (1998), 261–289.
  - [30] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Classics in Mathematics, Springer, Berlin, 2001.
  - [31] R. Gómez-Reñasco, *The effect of Varying Coefficients in Semilinear Elliptic Boundary Value Problems. From Classical Solutions to Metasolutions*. Ph. D. Dissertation, Universidad de La Laguna, Tenerife, March 1999.
  - [32] R. Gómez-Reñasco and J. López-Gómez, On the existence and numerical computation of classical and non-classical solutions for a family of elliptic boundary value problems, *Nonl. Anal. Th. Meth. Appl.* **48** (2002), 567–605.
  - [33] T. Kato, *Perturbation Theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer, Berlin, 1995.
  - [34] T. Kato, *Superconvexity of the spectral radius and convexity of the spectral bound and the type*, Math. Z. **180** (1982), 265–273.
  - [35] J. B. Keller, On solutions of  $\Delta u = f(u)$ , *Comm. Pure and Appl. Maths.* **X** (1957), 503–510.
  - [36] E. Krahn, *Über eine von Rayleigh formulierte minimaleigenschaft des kreises*, Math. Ann. **91** (1925), 97–100.
  - [37] J. López-Gómez, *On linear weighted boundary value problems*, in Partial Differential Equations, Models in Physics and Biology (G. Lumer, S. Nicaise, B. W. Schulze, Eds.), pp. 188–203, Mathematical Research v. 82, Akademie Verlag, Berlin, 1994.
  - [38] J. López-Gómez, *The maximum principle and the existence of principal eigenvalues for some linear weighted boundary value problems*, J. Diff. Eqns. **127** (1996), 263–294.
  - [39] J. López-Gómez, Large solutions, metasolutions, and asymptotic behaviour of the regular positive solutions of sublinear parabolic problems, *El. J. Diff. Eqns. Conf.* **05** (2000), 135–171.



- 
- [40] J. López-Gómez, *Spectral Theory and Nonlinear Functional Analysis*. Chapman & Hall / CRC. Research Notes in Mathematics 426. Boca Raton, 2001.
- [41] J. López-Gómez, Coexistence and meta-coexistence for competing species, *Houston J. Maths.* **29** (2003), 483–536.
- [42] J. López-Gómez, The boundary blow-up rate of large solutions, *J. Diff. Eqns.* **195** (2003), 25–45.
- [43] J. López-Gómez, Dynamics of parabolic equations: from classical solutions to metasolutions, *Diff. Int. Eqns.* **16** (2003), 813–828.
- [44] J. López-Gómez, Global existence versus blow-up in superlinear indefinite parabolic problems, *Sci. Math. Japn.* **61** (2005), 493–516.
- [45] J. López-Gómez, Uniqueness of large solutions for a class of radially symmetric elliptic equations, in *Spectral Theory and Nonlinear Analysis with Applications to Spatial Ecology* (S. Cano-Casanova, J. López-Gómez, C. Mora-Corral, Eds.), pp. 75–110, World Scientific, Singapore 2005.
- [46] J. López-Gómez, Metasolutions: Malthus versus Verhulst in population Dynamics. A Dream of Volterra, in *Handbook of Differential Equations: Stationary Partial Differential Equations*, (M. Chipot and P. Quittner, Eds.), Vol. 2, pp. 211–309, Elsevier, Amsterdam 2005.
- [47] J. López-Gómez, Optimal uniqueness theorems and exact blow-up rates of large solutions, *J. Diff. Eqns.* **224** (2006), 385–439.
- [48] J. López-Gómez and M. Molina-Meyer, *The maximum principle for cooperative weakly coupled elliptic systems and some applications*, *Diff. Int. Eqns.* **7** (1994), 383–398.
- [49] J. López-Gómez and M. Molina-Meyer, *Bounded components of positive solutions of abstract fixed point equations: mushrooms, loops, and isolas*, *J. Diff. Eqns.* **209** (2005), 416–441.
- [50] J. López-Gómez and M. Molina-Meyer, *Superlinear indefinite systems: beyond Lotka-Volterra models*, *J. Diff. Eqns.* **221** (2006), 343–411.
- [51] J. López-Gómez and M. Molina-Meyer, *Biodiversity through Co-opetition*, *Discrete Contin. Dyn. Sys. Ser: B*, **8** (2007), 1, 187 - 205
- [52] J. López-Gómez and P. Quittner, *Complete and energy blow-up in indefinite superlinear parabolic problems*, *Disc. Cont. Dyn. Sys.* **14** (2006), 169–186.
- [53] M. Molina-Meyer, Existence and uniqueness of coexistence states for some nonlinear elliptic systems, *Nonl. Anal. TMA* **25** (1995), 279–296.

- 
- [54] M. Molina-Meyer, Global attractivity and singular perturbation for a class of nonlinear cooperative systems, *J. Diff. Eqns.* **128** (1996), 347–378.
  - [55] M. Molina-Meyer, Uniqueness and existence of positive solutions for weakly coupled general sublinear systems, *Nonlinear Anal.* **30** (1997), 5375–5380.
  - [56] R. Osserman, On the inequality  $\Delta u \geq f(u)$ , *Pacific J. of Maths.* **7** (1957), 1641–1647.
  - [57] M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1967.
  - [58] T. Ouyang, On the positive solutions of semilinear equations  $\Delta u + \lambda u - hu^p = 0$  on the compact manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **331** (1992), 503–527.
  - [59] P. H. Rabinowitz, Some global results for non-linear eigenvalue problems, *J. Funct. Anal.* **7** (1971), 487–513.
  - [60] P. H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, **65**. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.
  - [61] D. Sattinger, *Topics in Stability and Bifurcation Theory*, Lectures Notes in Mathematics 309, Springer, Berlin 1973.
  - [62] B. Simon, *Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, I. Non-degenerate minima: Asymptotic expansions*, Ann. Inst. Henri Poincaré A **XXXVIII** (1983), 295–308.
  - [63] B. Simon, *Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, II. Tunneling*, Ann. Math. **120** (1984), 89–118.
  - [64] B. Simon, *Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, III. Width of the ground state band in strongly coupled solids*, Ann. of Physics. **158** (1984), 415–420.
  - [65] B. Simon, *Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, IV. The ea of the elephant*, J. Funct. Anal. **63** (1985), 123–136.
  - [66] G. Sweers, *Strong positivity in  $C(\bar{\Omega})$  for elliptic systems*, Math. Z. **209** (1992), 251–271.